

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

El rol de la geometría tridimensional en la comprensión de la integral doble para la ingeniería.

Marco Antonio **Ayala** Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ec

Resumen

Este artículo recoge una experiencia didáctica de clase realizada en la Universidad Técnica Particular de Loja con estudiantes de Ingeniería civil en el componente de Análisis Matemático Multivariado. La finalidad de esta intervención fue implementar una secuencia didáctica digital para la comprensión geométrica de la integral doble.

Esta secuencia didáctica se fundamentó en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas. Para su diseño se escogió una aplicación contextualizada de ingeniería y luego se generó una secuencia de actividades donde se exploró el objeto matemático desde un registro gráfico a un registro algebraico, es decir el estudiante parte de elementos geométricos tridimensionales de registro gráfico un “sólido” para luego hacer la coordinación de representación al registro algebraico “la integral” para luego resolver la aplicación.

Finalmente, se evaluó la secuencia didáctica de manera positiva aspectos como la comprensión geométrica del objeto matemático y la pertinencia de las características de la secuencia didáctica.

Palabras clave: Educación Matemática; Registros semióticos; Objeto matemático; Secuencia didáctica; cálculo.

Introducción

La Universidad Técnica Particular de Loja desde el 2017 viene desarrollando un proyecto llamado “innovación y buenas prácticas docentes”, en el marco de este proyecto los docentes aplican estrategias didácticas para mejorar la dinámica enseñanza-aprendizaje en el aula.

Esta secuencia de enseñanza busca analizar los procesos de coordinación de representaciones entre el registro gráfico y el registro algebraico que son realizados por los

estudiantes de ingeniería. En particular los estudiantes de Ingeniería civil en el componente de Análisis Matemático Multivariado. Este análisis surgió a raíz de ver la dificultad de los estudiantes en comprender el objeto matemático la integral doble en un espacio tridimensional para su aplicación en el desempeño profesional de la ingeniería.

Con base en esto se tomo la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas -TRRS- (Duval, 1999), para la elaboración de una secuencia didáctica donde se analiza las variaciones del objeto matemático en el proceso de coordinación de la representación gráfica-dinámica de un sólido diseñado en GeoGebra y la conversión al registro algebraico la integral.

Esta exploración del registro gráfico al algebraico implica la comprensión de algunos elementos geométricos del espacio tridimensional para poder realizar esta conversión en la secuencia didáctica

Como metodología de investigación, usamos la ingeniería didáctica -ID- propuesta por Michelle Artigue que se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue et al., 1995).

Finalmente, el objetivo general de esta intervención es analizar la incidencia del uso de la TRRS en la coordinación del registro gráfico al registro algebraico en una aplicación de contexto de la integral doble para estudiantes de ingeniería civil bajo la metodología de ID.

Marco Teórico

Registros de Representaciones Semióticas

Esta experiencia didáctica se fundamento en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval. Esta teoría propone que para tener acceso a la comprensión de un objeto matemático el individuo tiene que hacer una actividad cognitiva llamada formación de una representación, tratamiento y conversión entre los registros de representaciones semióticas de un objeto matemático (Duval, 2006).

Esta actividad matemática referente a la obtención de representaciones se llama semiosis, mientras que la apropiación de conceptos matemáticos se la conoce como noesis.

Hay tres actividades de coordinación de registros.

1. La actividad cognitiva de formación de una representación se refiere a una expresión de una representación mental.
2. La actividad cognitiva de tratamiento es el cambio de una representación semiótica desde de un mismo registro.
3. La actividad cognitiva de conversión es el cambio de representaciones semióticas de un registro a otro registro (Duval, 1999).

La coordinación de registros de representaciones semióticas requiere proponer una tarea secuencial que facilite la exploración sistemática de las variaciones del objeto matemático, para lograr su comprensión.

Ingeniería didáctica

La Ingeniería Didáctica es una metodología de carácter experimental, basada en las intervenciones didácticas en clase, que toman la forma de una secuencia de lecciones de enseñanza (Artigue et al., 1995).

Es decir, el mecanismo de análisis de las secuencias didácticas busca mirar fenómenos didácticos del objeto matemático.

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación tiene las siguientes características:

- Esta basada en las intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanzas.
- La validación es en esencia interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue et al., 1995).

Metodología

Para dar respuesta a los objetivos de esta investigación se implementaron 3 etapas:

Etapas 1. Apropiación de aprendizajes previos necesarios para la secuencia didáctica

En esta etapa se abordaron los conceptos necesarios para poder comprender geométricamente un sólido en el espacio tridimensional. Dichos conceptos fueron la comprensión de la región en 2D y funciones de dos variables en 3D como: plano y funciones cuadráticas, así como también sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas. Luego se abordó el concepto de Integral doble. Finalmente, la visualización del objeto matemático se llevó a cabo con el software GeoGebra. Esta etapa llevo alrededor de 12 semanas, con reuniones síncronas de 5 horas semanales. Se puede acceder a las clases en el siguiente link: <https://bit.ly/3LgE6F4>

Etapas 2. Diseño e implementación de una secuencia didáctica digital

Luego de la apropiación de los contenidos necesarios se diseñó la secuencia didáctica tomando como base una aplicación de ingeniería, donde los estudiantes hicieron uso de esos conocimientos previos. Esta secuencia se abordó desde la representación gráfica dinámica de un sólido diseñado en GeoGebra, hasta llegar a la conversión a su representación algebraica.

La secuencia didáctica tiene como enunciado el siguiente: “Plantear una integral doble a partir del sólido y encontrar su volumen:”. Este enunciado va acompañado de la representación dinámica del sólido (Figura 1).

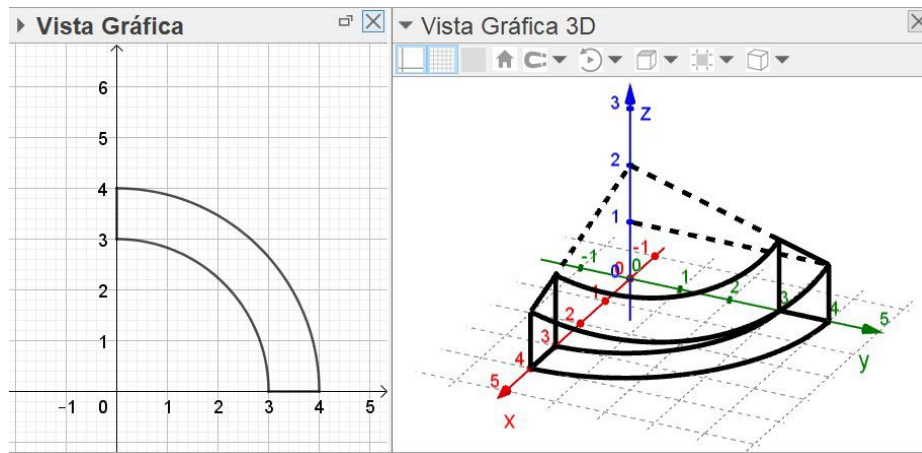


Figura 1. Región en 2D y solido en 3D

Generalmente en algunos de los planteamientos, los docentes parten de un registro algebraico a un registro numérico (Vigo Ingar, 2021). En este proceso el estudiante solamente resuelve una integral doble perdiendo totalmente la comprensión geométrica.

En el planteamiento de la aplicación contextualizada para ingeniería civil el estudiante se encuentra familiarizado con la construcción del sólido de la figura 1 ya que forma parte de las construcciones en el campo laboral de la ingeniería civil. En esta aplicación el estudiante calcula el volumen de una pieza de concreto para la construcción de una canal de riego, con medias reales.

La primera actividad de coordinación que realizó el estudiante fue la actividad cognitiva de conversión del registro gráfico “la región en 2D”, al registro algebraico “los límites de integración” Tabla 1

Tabla 1

Conversión del registro gráfico “la región en 2D”, al registro algebraico “los límites de integración”

Región en 2D (Registro Gráfico)	Límites de integración (Registro Algebraico)
	$\begin{cases} 3 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Los límites de integración se tomaron en coordenadas polares, sin embargo, el estudiante puede optar por hacerlo en coordenadas cartesianas. La siguiente conversión de registro hace referencia a encontrar la “tapa del sólido” en este caso particular, el plano. Para ello el rol de la geometría tridimensional juega un papel fundamental.

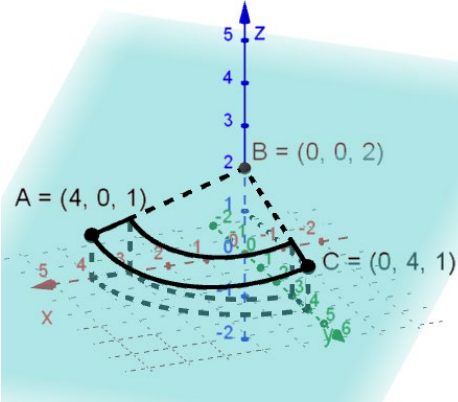
La determinación de la ecuación general del plano implica que el estudiante debe conocer los elementos necesarios para su planteamiento.

Se determinó el plano a partir de tres puntos, proceso conocido por el estudiante en la etapa 1; se puede mirar el plano con los tres puntos en la figura 1. Se trabajó con la ecuación general del plano en coordenadas cilíndricas. Esto implica una actividad cognitiva de tratamiento dentro del mismo registro algebraico de la ecuación la ecuación general del plano de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Luego, se tiene la conversión del registro gráfico “el plano en 3D” al registro algebraico “la ecuación general del plano”. En la Tabla 2.

Tabla 2

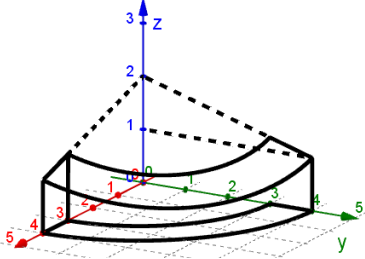
Conversión del registro gráfico “el plano en 3D”, al registro algebraico “la ecuación general del plano”

El plano en 3D (Registro Gráfico)	Ecuación general del plano (Registro Algebraico)
	$z = -\frac{1}{4}r\cos\theta - \frac{1}{4}r\sin\theta + 2$

Finalmente, con toda la coordinación de Registros anterior se lleva a cabo a la última conversión del registro gráfico “el sólido”, al registro algebraico “la integral” (Tabla 3). Con la integral ya se puede resolver la aplicación y encontrar el volumen del sólido.

Tabla 3

Conversión del registro gráfico “el sólido”, al registro algebraico “la integral”

El sólido (Registro Gráfico)	Integral (Registro Algebraico)
	$\int_3^4 r \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{4} r \cos \theta - \frac{1}{4} r \sin \theta + 2 \right) d\theta$

Etapla 3. Diseño del instrumento de evaluación de la secuencia didáctica

Para el instrumento de evaluación de la secuencia didáctica se diseñó la rúbrica de tabla 5.

Tabla 4

Rúbrica de evaluación de la Secuencia didáctica

Realizaron la coordinación de registros correctamente límites de integración, plano y resolvieron la integral	sin errores algebraicos
	con errores algebraicos
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo límites de integración y plano	sin errores algebraicos
	con errores algebraicos
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo los límites de integración	sin errores algebraicos
	con errores algebraicos

Resultados

La secuencia didáctica fue aplicada a 30 estudiantes de ingeniería civil. Los resultados obtenidos indican que el 70% de los estudiantes realizaron la coordinación de registros correctamente y resolvieron la integral, a esto se suma el 10% que realizaron solamente la coordinación de registros correctamente y la integral con algunos errores algebraicos. El 20% restante solo realizó la coordinación de registros con los límites de integración. Se puede acceder a las secuencias didácticas aplicadas a los estudiantes en este link: <https://bit.ly/3xvoFTI>

Tabla 5

Resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia didáctica

Realizaron la coordinación de registros correctamente con los límites de integración, el plano y resolvieron la integral	sin errores algebraicos	16
	con errores algebraicos	5
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo con límites de integración y el plano	sin errores algebraicos	3
	con errores algebraicos	-
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo con los límites de integración	sin errores algebraicos	6
	con errores algebraicos	-

Conclusión

La implementación de secuencia didáctica incidió positivamente en la apropiación del conocimiento de la integral doble, aportando la comprensión geométrica por medio de la coordinación de registros.

La secuencia didáctica permitió explorar el objeto matemático desde el registro gráfico al registro algebraico, poniendo en evidencia que el rol esencial de la geometría tridimensional para la coordinación de registros.

A pesar de que hubo “errores algebraicos” en los cambios de registro, y en solución de la integral, la comprensión del objeto matemático se evidencio en la solución de la aplicación.

Referencias y bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática*.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 9(1), 143-168.

Vigo Ingar, K. (2021). *El Teorema fundamental del cálculo en el contexto de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de ingeniería*. Milla Ltda.
<https://www.ilae.edu.co/files/book-pdf/20210408150406288156424.pdf>