



Guía sobre el uso de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos: Una propuesta didáctica para estudiantes y docentes de Matemática

Ana Lucía **Arias** Balarezo
Universidad Central del Ecuador
Ecuador

alarias@uce.edu.ec

Jimmy Alexander **Muela** Pillajo
Universidad Central del Ecuador
Ecuador

jamuelap@uce.edu.ec

Resumen

El objetivo del taller es proporcionar a estudiantes para docentes y a docentes en ejercicio un guía que facilite el uso del software GeoGebra para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos, en particular la concepción dinámica del concepto de límite de una función. El taller se deriva de una investigación más amplia cuyo sustento teórico es la teoría APOE de Dubinsky y la descomposición genética del concepto de límite de una función. el enfoque de la investigación fue cualitativo de nivel exploratorio-descriptivo, para lo que se elaboró un instrumento compuesto por cinco tareas didácticas que incluye una parte teórica con conceptos previos y, además cinco preguntas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma Geogebra.org. Se determinó que GeoGebra ofrece recursos útiles para desarrollar un proceso enseñanza-aprendizaje con enfoque dinámico y participativo.

Palabras clave: Teoría APOE; Concepto de Límite; GeoGebra.

Introducción

Esta propuesta didáctica se basa en una investigación bibliográfica y de campo; es decir, combina los fundamentos teóricos necesarios y la experiencia obtenida al aplicar el instrumento entre estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU). Se trata de una Guía Docente que aspira contribuir a superar las dificultades que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una función, a través del uso del software matemático GeoGebra. La guía contiene una planificación en la que se organizan las sesiones,

tareas, ejercicios y objetivos que van a ser tratados por los estudiantes de bachillerato. Además, se pone especial énfasis en las necesidades actuales de los estudiantes, ofreciéndoles la oportunidad de convertirse en los principales protagonistas del proceso enseñanza-aprendizaje. Se desea llevar a cabo este trabajo con el fin de encontrar un enfoque y estrategias dinámicas que sepan captar la atención del estudiante, se da importancia a esto último ya que para los autores “la motivación tiene una importancia considerable en la memoria prospectiva (acordarse de lo que uno tiene que hacer en el momento preciso)” (Blázquez et al., 2008, pág. 11), esto quiere decir que, si el docente aspira obtener buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la concepción de límites, previamente debe despertar la curiosidad, interés y motivación del estudiante, a través de distintos recursos didácticos o tecnológicos en función de las necesidades de los mismos.

Objetivo

Proporcionar a estudiantes para docentes y a docentes en ejercicio un guía que facilite el uso del software GeoGebra para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos, ejemplificando a través de la concepción dinámica del concepto de límite de una función en un punto.

Fundamentación Teórica Teoría APOE de Dubinsky

La principal razón por la que se escogió la Teoría APOE para esta investigación de entre muchas otras teorías de aprendizaje, se debe a que está enfocada totalmente en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, pues así lo afirman (Guerrero y Hernández, 2020) “Es una Teoría constructivista desarrollada por Dubinsky (1991) basada en el concepto de abstracción reflexiva, planteado por Piaget, para describir la construcción de conceptos matemáticos específicos en la educación superior” (p.2), ya que como docentes somos conscientes de que la Matemática suele ser una de las ciencias que más dificultades presenta al estudiante debido a su naturaleza abstracta; es decir, se trabaja con conceptos que son muy difíciles de encontrar en la vida cotidiana y esto produce un efecto negativo en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. Es por ello por lo que esta teoría resulta de gran utilidad.

Las estructuras mentales

Uno de los objetivos de este trabajo es dejar atrás la metodología de enseñanza tradicional basada en transmitir un conocimiento que los estudiantes repitan en el futuro, sino que sean ellos quienes construyan el suyo propio, comprendiendo cada uno de los procesos que se llevan a cabo para poder asociarlos con aquello que ya dominan; es decir, sus conocimientos previos. Para ello, se requiere desarrollar estructuras o construcciones mentales en los estudiantes, (Chaves & Jaimes, 2014) citan a Bermúdez (2011) quien nombra “construcciones mentales a todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permita obtener significado de ellas” (p.21), estas construcciones son las modificaciones y adaptaciones que un estudiante realiza en su mente a un nuevo concepto que está tratando, con el fin de entenderlo. Para conocer un poco más sobre cada una de estas estructuras mentales, (Trigueros, 2005) añade que “Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. El paso por estas tres etapas no es

necesariamente secuencial” (p.7), hay que aclarar que no se trata de un proceso lineal, ya que muchas veces el estudiante tendrá que retroceder para abrir nuevos caminos. A continuación, se presentan las estructuras mentales que conforman la Teoría APOE:

Acción: para (Guerrero y Hernández, 2020) “es una transformación del objeto percibida por el individuo como algo externo a él. Es decir, la persona cuya comprensión se limita a una concepción de acción puede realizar dicha transformación solamente reaccionando a causas externas [...]” (p.2), para que un estudiante alcance la comprensión de un concepto matemático debe iniciar con esta actividad mental o física, es por ello por lo que se le conoce como la construcción elemental.

Proceso: según (Preciado, 2014) “Cuando se da la repetición de una acción y el estudiante analiza y reflexiona sobre ella en un procedimiento autónomo, sin mediar ningún estímulo externo” (p.14), a esto se le conoce como interiorización; es la transición de acción a proceso. En esta etapa, el estudiante puede reflejar o visualizar mentalmente un proceso específico independientemente de si se cuenta o no con estímulos de carácter externo o interno.

Objeto: para (Guerrero y Hernández, 2020) “el sujeto reflexiona sobre operaciones que se aplican a un Proceso particular, toma conciencia del Proceso como una totalidad, realiza transformaciones (Acciones o Procesos) que puedan actuar sobre él y puede construir esas transformaciones” (p.2), esto se conoce como encapsulación del proceso y permite entender todo el conjunto de acciones o procesos desde un punto de vista más amplio.

Esquema: para (Trigueros, 2005) “se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente [...]” (p.11), todo este conjunto es utilizado por el estudiante, relacionándolos y manipulándolos; es decir, contará con una forma de decidir qué estructura mental utilizar con el fin de resolver un problema matemático.

Descomposición Genética

Aquellas estructuras mentales determinadas que el estudiante necesita para comprender un concepto matemático específico se le conoce como Descomposición Genética, esta no es única y puede ser mejorada conforme se va poniendo en práctica con los estudiantes, en relación con esto (Preciado, 2014) toma como base la definición propuesta por Asiala et al. (1996) quienes la entienden como “un conjunto estructurado de construcciones mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo” (p.16), para poder trazar eficientemente este camino, es importante que el docente tenga claro y analice cuáles son las acciones, objetos, procesos y esquemas necesarias que el estudiante debe desarrollar por sí mismo y de esta manera alcanzar el aprendizaje significativo. Para este proyecto se tomó como base la siguiente Descomposición Genética:

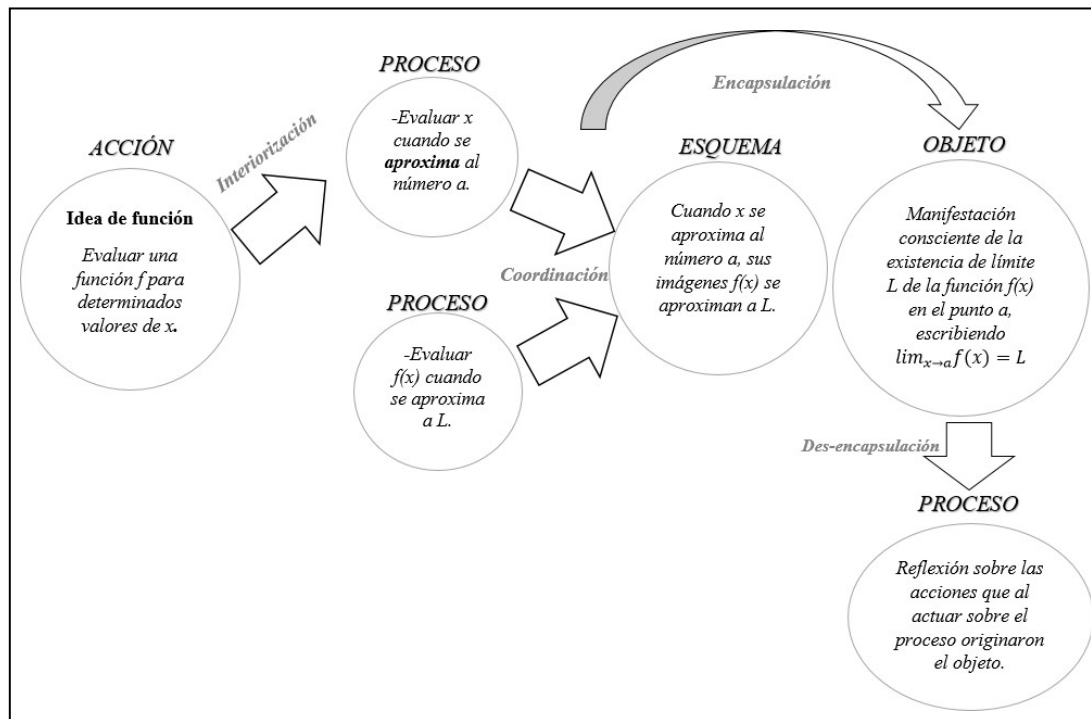


Figura 1. Organizador gráfico de Descomposición Genética.

Fuente: Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación (Arias A., 2019).

Concepción Dinámica de Límite

Tras su largo e histórico proceso evolutivo junto con el aporte de grandes matemáticos se presenta la definición de límite:

Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a , y se escribe: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

En la última etapa evolutiva del concepto de límite, dicho concepto empezó a ser tratado desde distintas perspectivas, más o menos formal, más dinámico, de manera simbólica; entre otras. Por lo tanto, se tuvo que escoger un enfoque dinámico para lo cual los autores (Guerrero y Hernández, 2020) citan a Blázquez y del Rincón (2022) “Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en un punto a y se debiera escribir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada” (p.4), esta definición es la que mejor se adapta a la propuesta didáctica y a los objetivos que se pretenden alcanzar.

GeoGebra como recurso didáctico

Es necesario recalcar la importancia que suponen los recursos didácticos en el proceso enseñanza-aprendizaje, sobre todo en la Matemática la cual trabaja con conceptos abstractos que muchas veces resultan difíciles de visualizar para el estudiante; con respecto a esto, (Díaz, 1996)

afirma que “Los recursos y materiales didácticos son todo el conjunto de elementos, útiles o estrategias que el profesor utiliza, o puede utilizar como soporte, complemento o ayuda en su tarea docente” (p.42), estos recursos permiten definir y centrar mejor la actuación pedagógica del docente; a su vez que aprovechan al máximo las actividades planteadas por el mismo.

Los softwares didácticos son uno de los principales recursos que utilizan actualmente los docentes para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. Para (Fernández, Riveros, & Montiel, 2017) un software educativo “Comprende un conjunto de recursos interactivos informáticos diseñados con la intención de ser utilizados en el contexto educativo, de allí la necesidad que hay en cuanto a las tareas del docente en incentivar su uso.” (p.12), aquellos softwares centrados y especializados en el campo de las ciencias exactas se les denomina softwares matemáticos.

Dentro de los softwares matemáticos destaca GeoGebra definido por (Rodríguez et al., 2020) “GeoGebra produce inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que se pueden realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones” (p.753), GeoGebra es un software matemático que destaca por tener la capacidad de diseñar modelos geométricos y algebraicos relacionados con situaciones de la vida real, para (Jiménez & Jiménez, 2017) “GeoGebra es un software gratuito y muy sencillo de operar, el cual puede presentar el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, pero es responsabilidad de cada docente hacer sus clases más interactivas, atractivas y entretenidas” (p.11). Las tareas, gráficas y conceptos que se pueden desarrollar con este software permiten al estudiante no sólo resolver los ejercicios planteados, sino también visualizar todos sus procesos y características, facilitando así la comprensión de un determinado concepto.

Algunas de las principales características que presenta GeoGebra según (Barahona et al., 2015, pág.123), son las siguientes:

- Presenta una interfaz intuitiva y fácil de usar para el estudiante; además, contiene un menú con una gran variedad de herramientas, comandos e íconos que buscan facilitar el trabajo.
- Ofrece una gran variedad de opciones a la hora de manipular y personalizar sus trabajos por medio de la interfaz de GeoGebra; es decir, pueden realizar etiquetas, cambiar el color o grosor de las curvas, el estilo; entre otras muchas variaciones.
- Muestra las relaciones matemáticas de forma dinámica al dar la posibilidad de que el estudiante manipule los objetos libres.
- Impulsa al estudiante a participar más en las clases, lo que le lleva a un descubrimiento experimental y de esta manera, facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje.

Metodología

Este trabajo se enmarca dentro del enfoque cualitativo, pues se centró en interpretar y entender las dificultades que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje para conceptos matemáticos, (Lerma, 2009) añade que “Los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones partiendo de los datos, y no recogiendo datos para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidas” (p.40), coincide con el desarrollo de esta investigación, pues en la misma se recogió información (sin medición numérica), que sirvieron de base y fundamento para el posterior desarrollo de la propuesta didáctica, en una interacción constante con los sujetos de estudio; es decir, los estudiantes.

El instrumento utilizado para recolectar información fueron cinco tareas didácticas de selección múltiple y de completar, presentadas en la plataforma GeoGebra.org. Antes de proceder con la aplicación del instrumento, el mismo fue analizado, revisado y corregido por dos expertos en docencia de conceptos matemáticos; por un lado, Milton Coronel, docente de Cálculo de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad Central del Ecuador y; por otro lado, Julia Valls, integrante del grupo de la investigación didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante.

Tras realizar las correcciones pertinentes del instrumento, se procedió con la recolección de datos en la que participaron un total de 46 estudiantes de tercer año de bachillerato del Colegio Municipal Juan Wisneth ubicado en el sector sur de la ciudad de Quito, el paralelo A con 25 estudiantes y el paralelo B con 21 alumnos, todos ellos comprendían una edad de entre 17 y 18 años. Este proceso se llevó a cabo en el primer quimestre del periodo lectivo 2020-2021. Se trabajó por sesiones, aplicando una a la semana en cada uno de los paralelos. Todas las reuniones, las cuales fueron ajustadas al horario escolar de los estudiantes, se realizaron por medio de la plataforma Zoom con una duración total de 80 minutos por sesión con cada paralelo. Una vez obtenida toda esta información, se analizaron e interpretaron los resultados con el fin de poder mejorar o modificar alguna de las actividades didácticas planteadas en la propuesta por medio de GeoGebra para el proceso enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos.

Conclusiones

1. El correcto uso del software matemático GeoGebra requiere de una previa revisión de todo lo que este software es capaz de ofrecer, junto con sus principales características y recursos. Las opciones que presentan mayor utilidad para los objetivos planteados en esta investigación son: capacidad de crear gráficos dinámicos, su personalización, su interactividad y la posibilidad de poder presentar todas estas tareas en *Geogebra.org*, que es su plataforma virtual.

2. El presente trabajo de investigación permitió identificar cuáles son las características idóneas y más adecuadas que debe conformar una propuesta didáctica para un correcto aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite en estudiantes de BGU. Es así que una propuesta debe estar compuesta, en primer lugar, por una revisión sobre los conocimientos previos necesarios que servirán de base y permitirán un adecuado proceso enseñanza-aprendizaje.

3. El uso del software matemático GeoGebra y de su plataforma virtual *Geogebra.org* hace posible diseñar una clase con un enfoque más dinámico e interactivo para los estudiantes, quienes se mostraron bastante participativos y activos durante las clases desarrolladas.

Referencias y bibliografía

Arias, A. (2019). Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación. Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, Departamento de innovación y formación didáctica, Alicante.

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., & Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL* Vol. 28, 121-132.

- Blázquez, S., Nora, S., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. Contextos Educativos: Revista de Educación Vol. 11, 7-21.
- Chaves, R., & Jaimes, L. (2014). Descomposición genética en la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Shwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1992). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme.
- Díaz, J. (1996). Los recursos y materiales didácticos en educación física. Apunts: Educació Física i Esports Vo. 43, 42-52.
- Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. Omnia Vol. 23, 9-19.
- Guerrero, J. Hernández, L. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la Teoría APOE. Innovación e Investigación en Matemática Educativa Vol. 5
- Jiménez, J. G., & Jiménez, S. (2017). Geogebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad Vol.4, 17.
- Lerma, H. (2009). Metodología de la investigación. Propuesta, anteproyecto y proyecto 4ª Edición. Bogotá: ECOE Ediciones.
- Preciado, J. (2014). Propuesta para la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de la herramienta computacional Winplot (Tesis de Maestría). Universidad Sergio Arboleda, Bogotá.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática Vol. 17, núm. 1, 5-31.