Presentación del libro: Ejercicios y problemas de Análisis Matemático. Uso de Asistentes Computacionales Matemáticos.

Idania Esther **Urrutia** Romaní
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
idania.urrutial@gmail.com

Resumen

El objetivo de esta ponencia es presentar un libro de ejercicios para la asignatura Análisis Matemático de la carrera de Ciencia de la Computación. El propósito es enriquecer la relación de ejercicios que aparece en los libros de texto incluyendo nuevos enunciados más adecuados a las competencias que se deben desarrollar dentro de la asignatura Análisis Matemático para la carrera de Licenciatura en Ciencia de la Computación. Esta propuesta de texto pondera además el desarrollo de competencias vinculadas al uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones y más recientemente el uso de dispositivos móviles, así como M-Learning, según aparece reflejado en todos los Objetivos Generales instructivos declarados en el Modelo del Profesional.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Ejercicios; Análisis Matemático; Competencias; M-Learning; Cuba.

Introducción

Se presenta a continuación un libro de ejercicios para la asignatura Análisis Matemático de la carrera de Ciencia de la Computación. No se pretende sustituir a los libros de Textos existentes, el propósito es enriquecer la relación de ejercicios que aparece en estos libros incluyendo nuevos enunciados más adecuados a las competencias que se deben desarrollar dentro de la asignatura Análisis Matemático para la carrera de Licenciatura en Ciencia de la Computación.

Teniendo en cuenta las competencias enunciadas en los diferentes eventos internacionales relacionados con el tema, las competencias matemáticas definidas por diferentes autores, y las investigaciones didácticas desarrolladas en la Universidad de la Habana por integrantes del Grupo de Educación Matemática se procede a continuación a seleccionar cinco competencias que se pueden desarrollar a partir de diferentes acciones y modificaciones a realizar, en el proceso de enseñanza aprendizaje del Análisis Matemático y que son afines al perfil de este profesional: Competencia de abstracción y desarrollo del pensamiento lógico; Competencia de resolución de problemas; Competencia para el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC); Competencia para la comunicación oral y escrita y Competencia para el trabajo en colectivo. Las competencias seleccionadas no se limitan a aquellas específicamente matemáticas; son competencias necesarias a desarrollar para cualquier profesional que se desea formar. Lo cual justifica la selección de competencias relacionadas con la modelación y el razonamiento matemático, así como para el uso del simbolismo y formalismo.

Esta propuesta de texto pondera además el desarrollo de competencias vinculadas al uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones y más recientemente el uso de dispositivos móviles, así como M-Learning, según aparece reflejado en todos los Objetivos Generales instructivos declarados en el Modelo del Profesional.

Exposición de algunos ejercicios del libro.

El libro que se propone abarca, en primer lugar, un resumen de los fundamentos teóricos del Análisis Matemático comprendidos en los programas de casi todas las carreras de Ciencias Básicas e Ingenierías y, además, de una gran variedad de ejercicios y problemas resueltos cuya visualización computacional ayuda a entender mejor los conceptos. No solamente muestra la resolución de los ejercicios, sino que enseña a buscarla mediante Asistentes Computacionales y Dispositivos Móviles. Esto no solo es una competencia básica afín al perfil del graduado en esta carrera, sino que está incluida en las restantes competencias que se deben desarrollar en los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura y de muchas otras en este siglo XXI. En esa búsqueda de las soluciones a los problemas se muestra siempre la importancia de los conceptos teóricos que las sustentan como premisa para el desarrollo del pensamiento lógico. El libo consta de 7 capítulos:

Tabla 1
Contenidos del libro

Capítulo 1	Introducción al Análisis Matemático.
Capítulo 2	Funciones y sus límites. Continuidad de funciones de una variable.
Capítulo 3	Derivada y diferencial
Capítulo 4	Integración
Capítulo 5	Series numéricas. Integrales impropias. Serie de Taylor.
Capítulo 6	Análisis de funciones de varias variables.
Capítulo 7	Sucesiones y series de funciones.

Los ejercicios se clasifican en dependencia del nivel de complejidad y en el tipo de herramienta que se utiliza para su resolución.

Tipos de ejercicios

ER Ejercicio resuelto: Se ofrecen vías para su resolución. Puede darse incluso la solución final del enunciado o proponer al estudiante que indague sobre cuestiones que pueden servir para enriquecer el ejercicio.

EC Ejercicio Computacional: Ejercicios o problemas donde se orienta ser resuelto utilizando herramientas computacionales.

EP Ejercicio de Premio: Ejercicios con un grado de complejidad mayor.

PC Proyecto Computacional: Por lo general son proyectos que pueden resolverse individual o en equipo y que requieren de entrega en un documento aparte. Para su evaluación se propone la exposición de dicho proyecto y pueden funcionar como evaluaciones independientes.

A continuación serán expuestos algunos ejemplos de los ejercicios antes mencionados:

ER 1. Resuelve las siguientes inecuaciones manualmente y usando alguno de los Asistentes Computacionales. Escriba la solución en notación de intervalos. Se ofrecen las instrucciones que permiten resolver estas inecuaciones utilizando el asistente Maple

a) $4x^2 \leq 8x+1$ $solve(4x^2 \leq 8x+1, x)$ $RealRange\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{5}, 1+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

b) $|2-x^2| \geq x^2$ $solve(|2-x^2| \geq x^2, x)$ $RealRange(-1, 1)$

c) $\frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1|$ $solve\left(\frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1|, x\right)$ $RealRange(Open(1), 4), RealRange(-2+\sqrt{6}, Open(1))$

ER 2. a) Calcula utilizando los Asistentes Computacionales el siguiente límite: $\lim_{n} \frac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}}$

b) ¿Qué significa este resultado?

c) Demuestra analíticamente que este límite no existe.

d) Representa en un sistema de coordenadas (n, x_n) los términos de la sucesión anterior.

e) ¿Está acotada la sucesión? En caso afirmativo determina una cota de la sucesión. Justifica.

a) Usando **Maple**

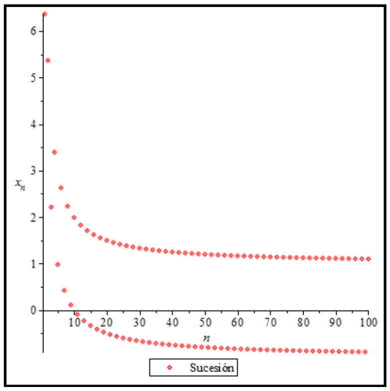
$\lim_{n / N} \frac{(K\ 1)^n \$ n\ C\ 10}{\sqrt{n^2\ C\ 1}}$; K 1 ..1

b) En este caso al aplicar el Asistente Computacional Maple para resolver este límite, la respuesta no es correcta pues devuelve dos valores para el límite.

c) $\lim \frac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n\left((-1)^n + \frac{10}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim(-1)^n$ que se sabe que no existe.

d) Usando **Maple**

```
> with(plots):
listplot([seq(((-1)^n*n+10)/sqrt(n^2+1), n = 1 .. 100)], color=red, style=point); (Figura1)
```



e) Esta sucesión está acotada. Observe los valores obtenidos en el gráfico. La demostración la dejamos al lector.

Figura 1. Representación de la sucesión.

Otro ejercicio de sucesiones interesante que permite observar la existencia de subsucesiones y puntos de acumulación:

EC 3. Dada la sucesión $x_n = \arctan n + \cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$

a) Obtenga los valores de los 200 primeros términos en una tabla.

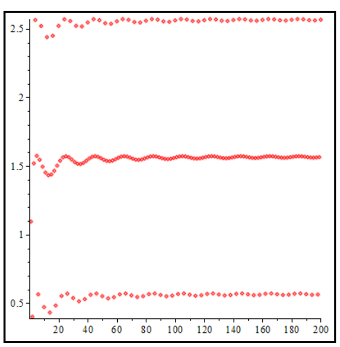
b) Representa en un sistema de coordenadas (n, x_n) la sucesión anterior.(Figura 2)

$$pointplot\left(\left\{seq\left(\left[n, \arctan(n) + \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot\pi/10)\right], n = 1..200\right)\right\}\right)$$

c) A partir de lo observado en el inciso anterior determina si la sucesión tiene puntos de acumulación. En caso afirmativo menciona los mismos.

d) Demuestra que son puntos de acumulación.

e) Es $\{x_n\}$ convergente. Justifica.



Realiza el mismo análisis para las siguientes sucesiones:

$u_n = \sin n + \cos n$

$h_n = \frac{1}{n}\tan n$

$k_n = \sin n\frac{\pi}{2} + \cos n\frac{\pi}{2}$

$c_n = n^p \sin n$ Representa en un mismo gráfico la sucesión para varios valores de $p \in \mathbb{Q}$

Figura 2. Representación de la sucesión.

Una de las aplicaciones más significativas que se pueden hacer desde el Análisis Matemático es abrir las puertas para diferentes tópicos de asignaturas de años superiores como la Matemática Numérica. Se exponen a continuación ejercicios relacionados con la búsqueda de raíces aproximadas utilizando Dispositivos móviles y Asistentes Computacionales (Método de Newton). El cumplimiento de las hipótesis de los Teoremas de Bolzano permite asegurar la existencia de ceros de funciones reales y aplicar este resultado a la búsqueda de soluciones de ecuaciones.

ER 4. Demuestre que la ecuación $x^3 + 5x + 10 = 0$ tiene al menos una solución real. Utilizando Dispositivos Móviles. Figuras 3 y 4 (capturas de pantallas).

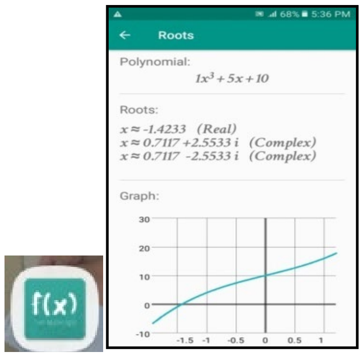


Figura 3. Aplicación: Crys: Math Tools

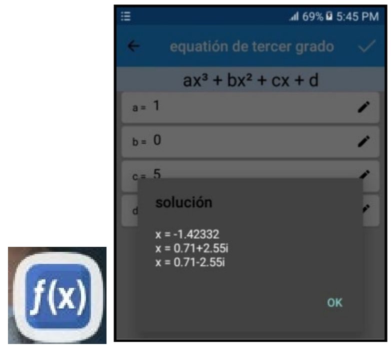


Figura 4. Aplicación: Mathematics

De igual manera se introduce la búsqueda de soluciones de ecuaciones mediante el Método de Newton a partir de una breve exposición teórica de la obtención de su fórmula :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 1$$

ER 5. Dada la ecuación: $10\ \ln(x) = x^3 - 3$. Justifica la existencia de sus raíces y utilice uno de los Asistentes Computacionales para determinarlas.

Se representa gráficamente la función $f(x) = 10\ln(x) - x^3 + 3$ en el intervalo [½; 3] (Figura 5):

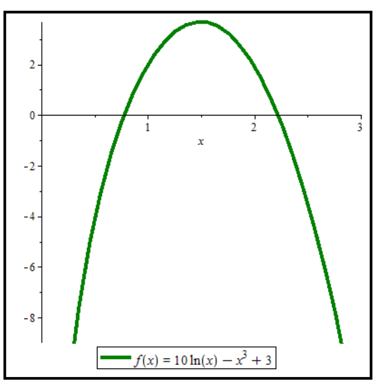


Figura. 5. Representación de la función $f(x)$

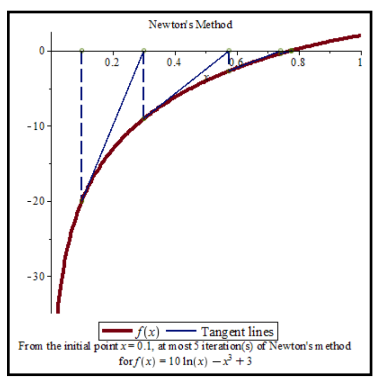


Figura 6. Obtención de la Raíz 1.

Observe que efectivamente en ese intervalo se encuentran dos raíces, se justifica por el Teorema de Bolzano su existencia y procede a encontrarlas.

$> 10 \cdot \ln(x) - x^3 + 3 = 0 \quad 10\ln(x) - x^3 + 3 = 0$

Raíz 1 $\xrightarrow{\text{solve}}$ 0.776299376 Raíz 2 $\xrightarrow{\text{solve}}$ 2.22330136

Con el Asistente Maple se calcula una de ellas aproximadamente utilizando el Método de Newton:

Para Raíz 1: (Figura. 6)

```
>with(Student[Calculus1]):
>Newtons Method(10*ln(x)-(x)^(3)+3, x = .1); 0.7762980652
>Newtons Method(10*ln(x)-(x)^(3)+3, x = .1, output = sequence);
0.1, 0.3003286079, 0.5745306115, 0.7409406304, 0.7751296806, 0.7762980652
>Newtons Method(10*ln(x)-(x)^(3)+3, x = 0.1, view = [0..1, DEFAULT], output = plot);
```

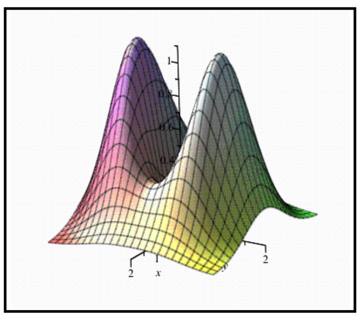
De igual manera se procede para la Raíz 2.

Como aplicaciones del cálculo diferencial de funciones de varias variables se exponen a continuación dos ejercicios resueltos de búsqueda de extremos relativos, absolutos y condicionados:

ER 6. Determina los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Utilizando los Asistentes Computacionales en particular Maple se obtiene la siguiente información $\left(x^2 + 3y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$ (Figura 7)

$\xrightarrow{\text{3D Plot (x^2+3*y^2)*exp(-x^2-y^2)}}$



$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} 2x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. y}} 6y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$

Figura 7. Representación gráfica de $f(x,y)$

$> solve\left(\left\{2x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} = 0, 6y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} = 0\right\}, [x, y]\right);$

$$[[x = 0, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = -1, y = 0], [x = 0, y = 1], [x = 0, y = -1]]$$

Derivadas de segundo orden

$$2x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) x\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}}$$

$$2\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 8\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} x^2 - 2\left(x^2 + 3y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2 - y^2} + 4\left(x^2 + 3y^2\right) x^2\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

$$6y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) y\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. y}}$$

$$6\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 24y^2\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2} - 2\left(x^2 + 3y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2 - y^2} + 4\left(x^2 + 3y^2\right) y^2\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

Derivada cruzada

$$2\,x\,e^{-x^2-y^2}-2\left(x^2+3\,y^2\right)x\,e^{-x^2-y^2}\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. y}}$$

$$-16\,x\,y\,e^{-x^2-y^2}+4\left(x^2+3\,y^2\right)x\,y\,e^{-x^2-y^2}$$

Le corresponde al lector determinar si las soluciones del sistema de ecuaciones formado por las derivadas parciales son extremos relativos de la función f.

Integrales múltiples y aplicaciones:

EC 7.Calcule el volumen del sólido K limitado por los tres planos coordenados y la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y = 1$.

Usando Maple:

```
>   F:=plot3d((x)^(2)+(y)^(2),x = 0 .. 1, y = 0 .. 1):
G:=implicitplot3d(x+y=1, x=0..2, y=0..2, z=0..2):
display({F, G});   (Figura 8)
```

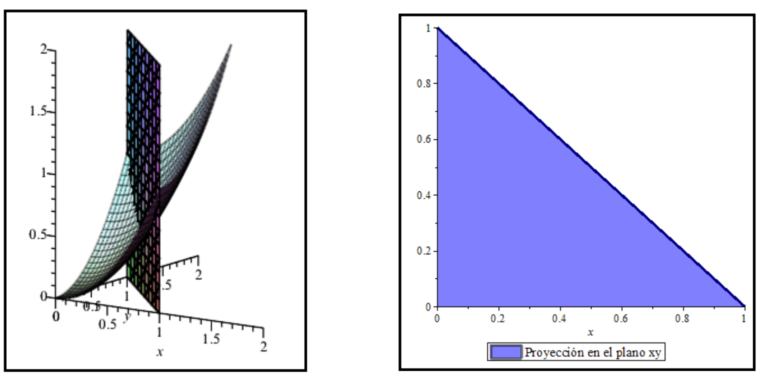


Figura 8. Representación y proyección en el plano "xy" del volumen del sólido a determinar.

$$> \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz\,dy\,dx \;=\; \frac{1}{6}\,u^2$$

PC 8. Proyecto Computacional

Trabajo a realizar por equipo de hasta 4 estudiantes.

Desarrolla una aplicación computacional que permita evaluar y graficar la siguiente función:

Tabla 2
Diferentes tipos de funciones a graficar.

	Parámetros	Función	Descripción
1	a, b, c, d, e, f	$g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$	Función racional: Cociente de polinomios hasta el grado 2
2	a, b, c, d	$f(x) = \frac{\ln(ax + b)}{cx + d}$	Cociente de logaritmo entre polinomio de grado 1
3	a, b, c, d, e	$h(x) = \frac{a \sin(bx + c)}{dx + e}$	Cociente de función trigonométrica entre polinomio de grado 1
4	a, b, c, d	$k(x) = \frac{ax + b}{e^{(cx+d)}}$	Cociente entre polinomio de grado uno y exponencial
5	a, b, c, d	$l(x) = \frac{arc(ax + b)}{cx + d}$	Cociente entre arcotangente y polinomio de grado 1

Atendiendo a diferentes valoras de los parámetros su aplicación deberá permitir:

a) Determinación y visualización del dominio de definición de la función. En caso de existir discontinuidades, éstas deben ser esclarecidas, justificadas analíticamente y representar las asíntotas verticales en caso de que existan.
b) Determinación de la simetría, periodicidad e interceptos para su localización en el gráfico de la función
c) Determinación y visualización de las asíntotas oblicuas $y = mx + b$
d) Cálculo y análisis de la primera derivada para la determinación y visualización de los extremos locales y los intervalos de monotonía.
e) Cálculo y análisis de la segunda derivada para la determinación y localización de los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.
f) Salida gráfica.

El programa puede ser implementado en cualquier lenguaje de programación.

Entregar:

- Reporte escrito en procesador de texto
- Código del programa en extensión ejecutable

El programa debe permitir cambiar los valores de los parámetros.

En el reporte escrito debe aparecer una salida del programa

Conclusiones

Se pone a consideración una propuesta de ejercicios seleccionados de varios textos de Análisis Matemático junto con otros ejercicios elaborados por el Colectivo de la asignatura a lo largo de varios años de trabajo y que responden al desarrollo de las competencias antes mencionadas. Además, se proponen los ejercicios y problemas con diferentes niveles de complejidad, desde aquellos semejantes a los que se han resuelto, hasta los señalados como ejercicios de premio y proyectos computacionales que exigirán un mayor nivel de abstracción, conocimientos y habilidades al estudiante

Este libro es el resultado de la labor del colectivo de profesores de la asignatura que ha colaborado también con problemas y materiales computacionales afines, y juntos hemos hecho un arduo trabajo durante años y que ahora se ve reflejado en este libro.

Referencias y bibliografía

Oberguggenberger, M., Ostermann A. (2011). Analysis for Computer Scientists. Foundations, Methods and Algorithms. En J.Salas-Salvadó, © Springer-Verlag London Limited

Sánchez, C., Valdés, C. (2001). Análisis Matemático I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Stewart, J. (2016). Cálculo. Trascendentes tempranas, octava edición. ISBN: 978-607-526-549-0. Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016. ISBN: 978-1-305-27237-8

Valdés, C. (2001). Análisis Matemático II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

Valdés, C. (2006). Análisis de Funciones de Varias Variables. Editorial Félix Varela. La Habana.

Valdés, C., Sánchez, C (2014). Representación de funciones. Editorial Félix Varela. La Habana.