

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Enseñanza de la función exponencial desde la teoría de Nociones Básicas

Nicolás Alarcón-Relmucao

Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld
Alemania

nicolas.alarcon@uni-bielefeld.de

Resumen

Diversas investigaciones referentes a la enseñanza de la función exponencial dan cuenta, por un lado, que el aprendizaje de este objeto matemático suele ser mecánico y centrado en la repetición de definiciones, propiedades y procedimiento, y por otro, que hay poca conexión con la realidad. Es por esto que esta investigación busca establecer las representaciones mentales fundamentales que los estudiantes deberían desarrollar, para tener una mayor comprensión de este objeto. Con el apoyo de la teoría de Nociones Básicas y a través del análisis temático con orientación didáctica, se pudo establecer dos nociones básicas propias de la función exponencial con las que los estudiantes pueden conectar la matemática y la realidad, además de establecer un puente entre la matemática formal y la matemática que se enseña en la escuela.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Educación; Educación matemática realista; Modelación; Resolución de problemas; Investigación teórica; Función exponencial; Chile-Alemania.

Introducción

Distintas investigaciones latinoamericanas dan cuenta de que las problemáticas con respecto a la enseñanza de la función exponencial tienen distintas aristas o diferentes factores a considerar, los cuales permiten inferir que existe una falta de comprensión de este objeto matemático tanto a nivel de estudiantes como profesores. Como lo menciona Álvarez (2017), muchas veces los estudiantes en formación de profesores de matemáticas no logran un aprendizaje adecuado de la función exponencial o, dicho de otra manera, los futuros docentes reciben una formación teórica-mecánica que luego se replica cuando éstos ejercen la profesión,

generándose una suerte de círculo vicioso. Las investigaciones de González (2013), Sureda y Otero (2013), Pezoa y Morales (2016) y Ortega, Nesterova, Ulloa, y Mendoza (2009), reafirman que la enseñanza de este objeto matemático es de carácter teórico-mecánico y que predominan los procesos algebraicos. Además, estas investigaciones mencionan que existen carencias de conexión entre la matemática escolar y la realidad, es decir, la enseñanza es descontextualiza. Por otro lado, los textos escolares a los que estudiantes tienen acceso muestran un mismo patrón mecánico, así, las investigaciones realizadas por Advíncula (2010) en Perú y Morales (2011) en Colombia, muestran que los libros plantean en una primera instancia una definición, en una segunda características y propiedades, y finalmente, se muestra una representación gráfica y algunos fenómenos asociados. Todo esto ha causado que los estudiantes memoricen muchas veces propiedades, fórmulas y que aplique características de la función exponencial en ejercicios tipos, sin tener un vínculo que permita dar sentido a lo que se está haciendo. Se puede observar ya en trabajos de Félix Klein, a principios del siglo XX, la necesidad de conectar la matemática con acciones familiares, es así que por ejemplo se puede ver en Klein (1928) como se familiarizaba el cálculo de la integral definida, dibujando, recortando y midiendo superficies en una hoja de papel, para después dar sentido a procesos más sistemáticos. Es aquí la razón del por qué esta investigación utiliza como marco teórico las nociones básicas (Grundvorstellungen en su lengua de origen, Alemania; desde ahora abreviado NB), ya que esta busca establecer las representaciones mentales fundamentales que deberían desarrollar los estudiantes con las que se capture la esencia de un objeto matemático a través de acciones concretas (reales o imaginarias) y les permita comprender características fundamentales de la función exponencial.

Esta investigación buscó responder la interrogante ¿Qué NB deberían activar y/o desarrollar los estudiantes para tener una mejor comprensión de la función exponencial?

Marco teórico

Tal como ya fue mencionado el marco teórico utilizado en esta investigación es el de las NB. Esta teoría tiene una larga tradición en la didáctica alemana, la cual se considera que es iniciada con el desarrollo conceptual de la formación de visualizaciones mentales, realizada por Pestalozzi en el año 1803, y culmina con la caracterización de las NB del contenido matemático propuestas por vom Hofe en el año 1995 (vom Hofe & Blum, 2016).

Vom Hofe (1995) plantea que las NB tienen tres características esenciales, las cuales permiten identificarlas desde la mirada del investigador. Estas son:

- La constitución del sentido, es decir, las nociones permiten constituir el(los) significado(s) de un contenido matemático a través de la vinculación de éste con experiencias familiares o acciones concretas (a nivel real o simbólico).
- La internalización (en el sentido de Piaget) de una representación mental correspondiente al concepto, es decir, que permita la acción operativa a nivel de pensamiento.
- Volver a reconocer la estructura presente en la constitución (primera característica) en diversos contextos con la ayuda de estructuras matemáticas.

Así, se puede definir las NB desde dos miradas distintas. Si el foco está puesto en el individuo, las NB describen la relación entre el contenido matemático y la formación de

conceptos individuales (aspecto descriptivo de las NB). Por otro lado, desde el punto de vista del contexto de aprendizaje, las NB caracterizan conceptos o procedimientos matemáticos con posibles interpretaciones en situaciones de la vida real, el cual es denominado por la literatura como el aspecto normativo de las NB. Una distinción entre estos aspectos, es que cuando uno hace referencia a lo normativo, habla de la conexión entre la matemática y la realidad de manera ideal, en cambio el aspecto descriptivo muestra lo que realmente está sucediendo en la cabeza de los estudiantes, es decir, nos refleja la realidad. Las NB, como teoría, buscan acercar las diferencias entre estos aspectos, por lo que se establece el aspecto constructivo de las nociones, el que (desde una mirada didáctica) busca que los estudiantes puedan desarrollar estas nociones ideales y que estén presentes en la realidad de los alumnos y que sean utilizables en distintas situaciones (vom Hofe, 1995; vom Hofe & Blum, 2016).

Desde el marco teórico hay algunas preguntas esenciales, cuyas respuestas (a posteriori) permitieron orientar la investigación y responder la pregunta mencionada anteriormente. Para poder establecer las NB de la función exponencial es necesario preguntarse desde la matemática ¿Qué caracteriza a la función exponencial? ¿Cuál es la esencia de esta función? y ¿Qué contextos de aprendizajes capturan esto? Desde el punto de vista didáctico, es necesario preguntarse ¿Cómo los estudiantes pueden desarrollar estas NB? Las respuestas a estas interrogantes, utilizando la metodología de Salle & Clüver (2021), permitió establecer las NB de la función exponencial desde el aspecto normativo y nos brindó elementos basales para poder construir esta función en la sala de clases.

Metodología

Para poder establecer las NB de la función exponencial se utilizó la metodología de investigación del análisis temático con orientación didáctica (didaktisch orientierte Sachanalyse en su lengua de origen, Alemania) propuesto por Salle & Clüver (2021). Esta investigación propone directrices metodológicas para establecer NB desde una mirada normativa. Así, Saller & Clüver (2021) establecen cinco pasos importantes, con las cuales se puede NB, estos son:

1. La determinación de conceptos centrales, es decir, los conocimientos previos que se deben tener para poder trabajar con el objeto matemático, en nuestro caso, los elementos previos que se necesitan para trabajar con la función exponencial.
2. Un análisis temático sustentado en la formación de categorías, las cuales se forman sobre la base de definiciones matemáticas pertinentes, fenómenos y resultados empíricos. Este paso propone un análisis histórico de la construcción de la función exponencial, del cómo se aborda este objeto en la escuela (textos escolares y planes de estudio) y cómo se aborda a nivel matemático.
3. Formulación concreta de las NB a partir del análisis de las relaciones establecidas en el paso (2).
4. Relación entre las NB concretas establecidas en (3) con otras nociones ya existentes.
5. Explicación de la relevancia didáctica de estas nociones.

Como se puede observar, con la ayuda de los primeros tres puntos es posible sustentar la identificación de NB y es lo que presentamos en este trabajo.

Resultado de la investigación

Con la ayuda del análisis temático con orientación didáctica de Salle & Clüver (2021), se pudo identificar dos NB de la función exponencial. Las cuales son:

1. **Noción de crecimiento (decrecimiento) porcentual:** La función exponencial describe un crecimiento (decrecimiento) en el que los valores de la función siempre van aumentando (disminuyendo) en el mismo porcentaje en cada paso, a partir de un valor inicial. Un ejemplo típico donde se encuentra esta noción es al trabajar tareas de interés compuesto.

Existen dos formas de trabajar esta noción, la primera es a través de la suma sucesiva, esto hace referencia matemáticamente a $f(n + 1) = f(n) + k \cdot f(n) \forall n \in \mathbb{N}$. La segunda forma de trabajar es esta noción es entendiendo en profundidad el significado del porcentaje, por lo que se construye el factor porcentual, lo que matemáticamente alude a $f(n + 1) = f(n) \cdot (1 + k) \forall n \in \mathbb{N}$.

Esta noción se sustenta históricamente en el desarrollo establecido por la civilización babilónica y el trabajo de Leonhard Euler, ambos muestran la importancia de la variación porcentual constante, tanto en el ámbito económico como el crecimiento poblacional.

Una representación gráfica del trabajo con esta noción es la que se muestra a continuación:

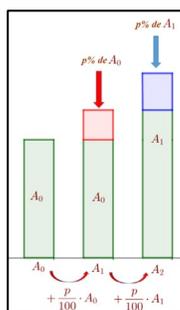


Figura 1. Adición sucesiva de un valor porcentual

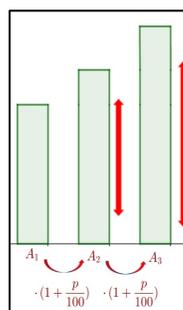


Figura 2. Adición sucesiva de un valor porcentual

2. **Noción de crecimiento (decrecimiento) por un factor constante:** La función exponencial describe un crecimiento (decrecimiento) en el que los valores de la función se van multiplicando por un factor constante en cada paso, a partir de un valor inicial. Un ejemplo típico donde se puede observar esta noción es cuando se trabaja tareas sobre el crecimiento de bacterias.

Esta noción hace referencia a la función como una operación, lo que matemáticamente hace referencia a $f(n + 1) = p \cdot f(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

El sustento histórico de esta noción se encuentra en el desarrollo establecido por los egipcios, griegos, chinos y principalmente, por los trabajos de Nicolás Oresme y Nicolás Chuquet.

Una representación gráfica del trabajo con esta noción es la que se muestra a continuación:

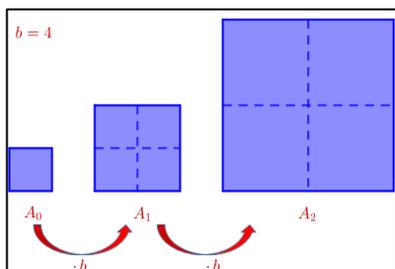


Figura 3. Crecimiento porcentual por un factor constante

De esta manera, al poner énfasis en el proceso cognitivo que hay detrás de cada uno de estos contextos, los estudiantes pueden construir de mejor manera (desde el punto de vista de este marco teórico) la función exponencial. Por un lado, se conecta este objeto matemático con la realidad y por otro, se centra la enseñanza en el proceso y sus significados, en vez de un aprendizaje repetitivo, mecánico y memorístico. Es importante mencionar que, si bien ambos procesos se describen matemáticamente por la misma ecuación funcional, la construcción a nivel cognitivo es totalmente distinta. Es aquí la importancia de mostrar a los estudiantes estas diferencias, para que luego éstos puedan desarrollar representaciones mentales adecuadas y que les permita construir, con sentido (comprendiendo), la función exponencial.

Referencias y bibliografía

- Advíncula, E. (2010). *Una Situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial, dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades*. (Tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Álvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- González, C. (2013). *Una resignificación de lo exponencial a través del binomio modelación-graficación*. (Tesis de maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Klein, F. (1928). *Präzisions- und Approximationsmathematik*. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, vol. 3. Berlin: Springer.
- Morales, A. (2011). Un breve estudio histórico y epistemológico de la función exponencial y análisis de algunos libros de texto. *Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística*, (10), 123-129.
- Ortega, M., Nesterova, E. y Mendoza, S. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con el empleo de diferentes registros de representación semiótica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, (22), 561-571.

- Pezoa, M., y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 11(2), 52-64.
- Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien-Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 553-580. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5>
- Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación matemática*, 25(2), 89-118.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 225-254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>