



Diseños didácticos en el Aula Virtual de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión

Cristian Fabián **Ariza** Pérez

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

cfap159@hotmail.com

Jorge Enrique **Fiallo** Leal

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación en desarrollo consistente en el diseño e implementación de una secuencia didáctica en el Aula Virtual de GeoGebra, para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y favorecer la inclusión en estudiantes de grado séptimo. Para el diseño de las tareas se hizo una adecuación del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) a los procesos matemáticos de resolución de problemas, comunicación, representación, procedimientos y razonamiento y demostración, en donde se plantearon 4 tareas con diferentes niveles de profundidad, según las capacidades matemáticas y las necesidades educativas especiales. Los resultados muestran como los diseños mediados por la tecnología ayudan a la generalización de patrones.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Educación para población con necesidades especiales; Aula virtual de GeoGebra; Investigación cualitativa; Pensamiento algebraico; Universidad Industrial de Santander; Colombia.

Marco de referencia

Las investigaciones en educación matemática de los últimos años sobre desarrollo del pensamiento algebraico en los niños se han centrado en el proceso de transición entre la educación primaria y secundaria, donde el estudiante pasa de la aritmética básica al álgebra. En esta última etapa, el desarrollo del pensamiento matemático es más compleja, debido a que el

concepto de variable, las nuevas representaciones de las operaciones matemáticas, como la multiplicación y/o la división, y la concatenación entre números y letras son un cambio brusco, en comparación con las formas en que se venían desarrollando estos conceptos y operaciones en los grados anteriores (Kieran, 1989). Asimismo, estos obstáculos en el aprendizaje del álgebra se agudizan en estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE), debido a la poca preparación que tiene el personal docente en los colegios colombianos, como menciona Pineda (2018). En consecuencia, y en vista de promover una educación básica secundaria que permita a los estudiantes conseguir las habilidades necesarias en álgebra, los Estándares Básicos en Competencia en Matemáticas establecen el estudio de patrones como uno de los principales promotores del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraico.

Con base en las anteriores problemáticas e ideas, concretamos la siguiente pregunta: ¿Cómo promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en estudiantes de grado séptimo mediante el uso de patrones y la tecnología?

Por otra parte, esta investigación se comprende de una serie de conceptos teóricos relevantes para contextualizar el diseño de este trabajo. El Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) es definido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017) como “una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes” (p.5) y establece los siguientes tres principios. (Figura 1)



Figura 1. Principios del DUA.

Por otra parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) estipuló en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas los procesos que se deben fomentar en la actividad matemática del estudiante.



Figura 2. Procesos a desarrollar actividad matemática del estudiante

La concepción de pensamiento algebraico será entendida bajo el sustento del MEN (2006), que es el “reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (p.66).

Dentro de este trabajo investigativo el término “patrón” toma un papel principal, donde se entenderá como “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse”. Según Zapatera (2018), los patrones se pueden separar en dos grupos, de repetición o de recurrencia. En los *patrones de repetición* los elementos se presentan de forma periódica y características como el tamaño, color o posición son elementos importantes de la regla que determina el patrón; en cambio, en los *patrones de recurrencia* los términos de la sucesión aumentan o disminuyen de forma progresiva según la regla que lo determina y cada término se expresa en función de los anteriores.

Este último tipo de patrones son los que se utilizaron en esta investigación, los cuales están divididos en dos categorías: *patrones numéricos*, son listas de números que “siguen una cierta secuencia. En ellos se alcanza a determinar de cuánto en cuánto está cambiando, pero no se hace evidente lo variable y lo invariante” (Pulgarín, 2015, p.33). Los *patrones geométricos*, son “una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales” (Arbona et al., 2017).

Según Ramírez et al. (2013) la identificación de un patrón se puede describir como la “generalización de un fenómeno”. Kaput (citado por Ramírez et al. 2013), dice que el proceso de generalizar dentro de la actividad matemática requiere del desarrollo de tres actividades básicas:

- Identificar similitudes en un conjunto de casos.
- Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó.
- Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Estos procesos mencionados por Kaput son los que sustentan el diseño de actividades propuesto y las preguntas que se formularon para acompañar los patrones presentados, además, de ser los procesos que se busca identificar en las acciones que se realicen los estudiantes.

La identificación de un patrón involucra las tres componentes del pensamiento algebraico, debido a que según Radford (2011) la indeterminancia y la analiticidad están ligadas a la regla que usa el estudiante para tratar con cualquier figura del patrón y la forma en la que expresa la regla ya sea de manera oral u escrita alude a la componente de la expresión simbólica. La forma en que el estudiante demuestra cómo interactúa con ellas permitirá clasificarlo en uno de los siguientes tipos de pensamiento propuestos por Radford (2010):

- Factual: La indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación por parte del estudiante, por lo que usa gestos, movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras, para expresarla.
- Contextual: La indeterminancia alcanza el nivel de enunciación y es explícita por parte del estudiante, los gestos y las palabras son sustituidos por frases “clave” como “la fila de arriba por 2 y al resultado le resto 1”.
- Algebraico simbólico: Las frases clave utilizadas en el pensamiento anterior, son expresadas a través de símbolos alfanuméricos. Por ejemplo: $n(n+1)$.

Metodología

La metodología de este trabajo está en concordancia con las ideas expuestas por Díaz-Barriga, et al (1990), quienes definen al diseño curricular como la organización y estructuración sistemática del currículo. La metodología de esta investigación se compone de cuatro fases: Revisión de los documentos curriculares y las orientaciones pedagógicas; Diseño de la malla curricular; Planteamiento del diseño didáctico y finalmente, Implementación y valoración del diseño didáctico.

Para el planteamiento del diseño didáctico se tuvo en cuenta la estructura de los diseños didácticos proporcionada por el proyecto de investigación 70783 “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología e Innovación de Colombia. Establece que todo diseño didáctico se divide en cuatro niveles de profundidad y las actividades están dirigidas a estudiantes con:

- Nivel de profundidad 1: mayores dificultades, a nivel físico, intelectual o psicosocial. Estos estudiantes son muy visuales y su principal medio de comunicación es la oralidad, por lo que las actividades deben utilizar recursos visuales o concretos, además, de contar con un apoyo constante del docente.
- Nivel de profundidad 2: dificultades moderadas en las categorías mencionadas en el nivel anterior. Por otra parte, este grupo de estudiantes posee mejores habilidades de

comunicación escrita y oral que el nivel anterior, sin embargo, las actividades deberán tener un enfoque similar en el uso de materiales y la atención prestada por el profesor.

- Nivel de profundidad 3: dificultades leves, por lo que se puede utilizar un lenguaje matemático más preciso y una menor guía y supervisión por parte del profesor.
- Nivel de profundidad 4: capacidades excepcionales en matemáticas, por lo que es necesario diseñar actividades que promuevan la curiosidad, la demostración y la formulación de nuevas preguntas e ideas.

Además, cada uno de esos diseños está compuesto por cuatro momentos que servirán a los estudiantes para conceptualizar el objeto matemático de estudio, presentados a continuación:

- Momento 1: Es el inicio de la clase, aquí se desarrollan las actividades que permitirán introducir el objeto de estudio. Dentro de este momento se recomienda utilizar materiales lúdicos o notas históricas para la valoración de los presaberes.
- Momento 2: Es el espacio donde se posibilita la matematización del objeto de estudio. El profesor tendrá un papel de mediador donde promoverá la construcción de saberes por parte del estudiante.
- Momento 3: Es la parte de la clase donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos hasta el momento. Las actividades están enfocadas a la ejercitación, aplicación, problematización del objeto de estudio.
- Momento 4: Es el momento para valorar el desempeño de los estudiantes a través de tareas retadoras. Se proponen actividades retadoras, dinámicas, problemas que permitan valorar los aprendizajes.

También, se cuenta con formato de caracterización, que pretende conocer si el estudiante tiene alguna discapacidad y el rendimiento escolar que ha mostrado a lo largo del periodo escolar, lo cual, permitirá determinar en qué nivel se encuentra el estudiante.

El aula virtual de GeoGebra es un recurso tecnológico que ofrece una variedad de opciones para el diseño de actividades en matemáticas, dentro esta, se encuentra el formato libro, que permite diseñar lecciones divididas en capítulos, en cada capítulo se pueden introducir videos, audios, preguntas, imágenes, entre otros.

En los primeros dos capítulos, el estudiante encontrará el siguiente applet en el que se le relata la situación problema.

Es importante resaltar que el applet le presenta la cantidad de discos que destruye Jenny de las tres primeras semanas y a partir de la semana cuatro hasta la diez, el estudiante debe hallar la cantidad, en caso de que conteste mal, el applet tiene una retroacción, primero le muestra la cantidad total de discos en color rojo y un texto con una sugerencia. Si el estudiante contesta bien saldrá un enunciado felicitándolo (Figura 3).

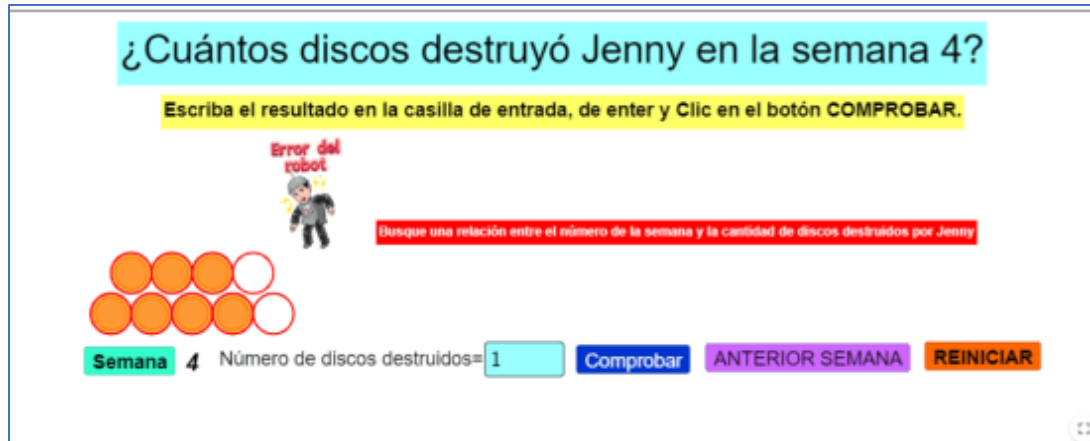


Figura 3. Patrón del tercer momento.

Luego de trabajar con el applet, el estudiante debe responder preguntas, donde se fomenta el proceso de comunicación y de razonamiento y demostración, a través de pedirle explicaciones del proceso empleado (Figura 4).

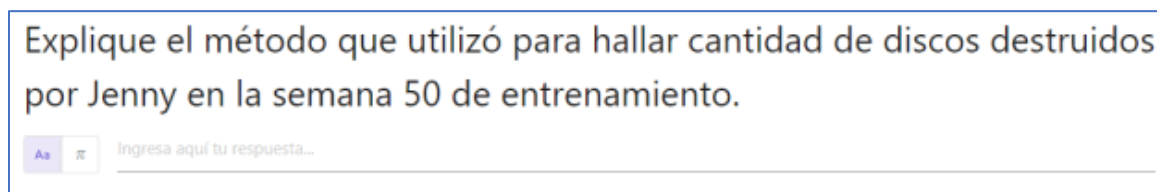


Figura 4. Preguntas que acompañan al applet.

Algunos Resultados

La implementación de los cuatro niveles de profundidad fue llevada a cabo en un colegio público del área metropolitana de Bucaramanga, con un total de cuatro estudiantes del grado séptimo, se realizaron dos sesiones de dos horas, en la primera sesión se trabajó con los cuatro estudiantes y la segunda solo con los estudiantes del segundo y tercer nivel de profundidad (ahora en adelante primer y segundo nivel). El estudiante de primer nivel tiene Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDH), hiperactividad, trastorno opositor desafiante, psicosis de origen orgánico y trastorno de ansiedad. El estudiante de segundo nivel cuenta con TDH, y los otros dos estudiantes no cuentan con ningún diagnóstico clínico y tampoco mostraron signos de tener alguna condición de discapacidad.

En la primera sesión, se esperaba que los applets presentes en cada capítulo de los libros fueran una guía para la comprensión de la actividad. En los primeros tres niveles de profundidad, el applet del primer momento proporcionó las instrucciones y ayudas necesarias para que el estudiante pudiera identificar el patrón, pero en el primer nivel, el applet no tuvo la misma eficacia, debido a que el estudiante tiene un bajo nivel de lectura, por lo que fue necesario que el investigador le ayudara con la lectura de las instrucciones.

Otro problema que se presentó con el estudiante del primer nivel fue que posee una memoria a muy corto plazo, debido a que no recordaba las cantidades de discos de la semana anterior, esto dificultó el desarrollo de la actividad. El estudiante trabajó toda la sesión, pero en ningún momento mostró acciones acordes a los procesos de generalización de Kaput.

El estudiante de segundo nivel pudo desarrollar satisfactoriamente la actividad, los applets diseñados le proveyeron una guía que le permitió identificar el patrón en cuestión. En todos los casos encontró el patrón de la siguiente forma: “semana anterior más 2” y “semana anterior más 3”, acciones que dan evidencia de que él pudo captar la característica común de los términos y diseñar una regla eficaz, pero no práctica. Para la construcción de una regla más eficiente, el investigador aprovechó las múltiples representaciones del objeto matemático y junto al estudiante establecieron relaciones entre las figuras presentadas en los applets y número del término, además, se resalta el uso de la calculadora como un recurso muy importante para centrar la actividad en la comprobación de ideas, debido a que él presentaba un bajo manejo de las operaciones aritméticas básicas.

El estudiante de tercer nivel logró realizar todas las actividades de manera satisfactoria, debido a que en todas situaciones problemas logró identificar la característica común entre los términos del patrón, asimismo, diseño reglas aritméticas eficaces y prácticas, las cuales posteriormente se convirtieron en formulas generales, estas acciones son evidencia que logró derivar sus resultados más allá de casos particulares, como se evidencia en la siguiente (Figura 5).

Explique el método que usó para encontrar la cantidad de metros que debe recorrer Marcos.

Aa π al numero del día le multiplica 3 y le restas 1

Figura 5. Respuesta del estudiante de tercer nivel.

El estudiante de cuarto nivel también realizó de manera satisfactoria todas las actividades; logró identificar la característica común entre los términos del patrón y construyó reglas eficaces para calcular cualquier término del patrón en cuestión. Respecto a los procesos de Kaput, se puede afirmar que pudo derivar en casos más amplios que los particulares. También, se destaca la forma en la que el estudiante manipuló la indeterminancia en las actividades, que nos da indicios de que el posee un pensamiento algebraico simbólico “primitivo”.

Por último, es importante destacar que, en el tercer y cuarto momento de todos los niveles, había preguntas que consultaban por la semana n de entrenamiento. El investigador realizó con cada estudiante una discusión de manera individual sobre que significaba la n y como se calculaba la cantidad de discos. En general se consiguió formar de manera muy intuitiva el concepto de que n representa un número desconocido.

Conclusiones

Con base a los resultados y objetivos del estudio, se puede afirmar que los diseños didácticos de los tres últimos niveles cumplieron con el objetivo, que era ayudar a desarrollar el pensamiento algebraico a través del análisis de patrones geométricos y numéricos, asimismo, se logra introducir el concepto de variable a través del análisis de la semana n de entrenamiento y que n representa un número desconocido.

Por otra parte, el objetivo era proveer diseños didácticos en cuatro niveles de profundidad, que permitieran la atención y el desarrollo de ideas en matemáticas en estudiantes con NEE, se puede afirmar que, aunque se diseñe actividades con un nivel de complejidad bajo, habrá estudiantes que por sus condiciones y el proceso académico que han llevado les sea imposible desarrollar la actividad, como fue el caso del estudiante de primer nivel de esta investigación. Con base a esta situación y conociendo de antemano que en el aula de clase posiblemente habrá más estudiantes con estas mismas condiciones, se decidió crear una actividad adicional, la cual representaría como el nivel de profundidad 0, está contará con la misma estructura y se mantendrán los cuatro momentos y las preguntas planteadas en ellos.

Los applets diseñados fueron un medio importante en la comprobación de ideas e hipótesis sobre las reglas para calcular el patrón, asimismo, la calculadora ayudó a centrar la actividad matemática en la comprobación de ideas y la disminución del estrés que provocaba la realización de tantos cálculos. No obstante, los applets para los dos primeros niveles deben ser modificados para que presenten las tres semanas al tiempo y no una a la vez, debido a que los estudiantes de estos niveles presentan una memoria muy corta, de esta manera se les podría facilitar el análisis de los términos y pueden apreciar con mayor facilidad el aumento entre cada término. También, incluir colores puede ser una buena estrategia que ayude a la identificación del patrón.

Agradecimientos: La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Referencias y bibliografía

- Arbona, E., Beltrán, M. J., Jaime, A. & Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, 86, 39–46.
- Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Agosto 29 de 2017.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas*. Imprenta Nacional de Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Project 70783. (2021). Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores [Didactic designs for inclusion in mathematics with the mediation of technologies: training and reflection processes with teachers]. Ministerio de Ciencia y Tecnología e Innovación de Colombia.

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 – 12 años* (tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. 303-322. Berlin: Springer-Verlag.

Ramírez, M., Pineda, M., & Roa, S. (2013). Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria. *Revista Científica*, 345-348.
<http://funes.uniandes.edu.co/6653/>

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números Revista de Didáctica de las matemáticas*, 97, 51–67.
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/97/Articulos_04.pdf