

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Concepto de variable en una tarea de comparación de funciones para estudiantes de Educación Primaria

María del Carmen **Pérez**

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
España.

mcperezmartos@ugr.es

Antonio **Moreno**

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
España

amverdejo@ugr.es

Resumen

En esta comunicación mostramos parte de los resultados del análisis de una sesión perteneciente a una investigación más amplia. Nuestro objetivo es describir las evidencias del uso de la variable en relación funcional encontradas en un grupo de 24 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años) al comparar funciones. Para alcanzar este objetivo, realizamos un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva y hacemos uso de un modelo de análisis de elaboración propia confeccionado a partir del Modelo 3UV propuesto por Ursini y Trigueros (2006). La recogida de información se realiza mediante audio, vídeo y por escrito. Entre los resultados obtenidos destacamos que, al resolver esta tarea de comparación de funciones, hay conceptos como el dominio que los alumnos ponen en juego al poner de manifiesto los aspectos característicos que el Modelo 3 UV propone para el uso de la variable estudiado.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación Primaria; Enseñanza presencial; Investigación Educativa; Pensamiento Algebraico; Pensamiento Funcional; Variable; Conceptualizaciones de la Variable; Representación.

Introducción y antecedentes

El pensamiento algebraico, según Radford (2012), es una forma particular de reflexionar en la matemática y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. Este autor considera que la naturaleza del pensamiento algebraico emerge en los estudiantes como una

forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente, con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas.

El pensamiento algebraico y el pensamiento funcional (Cañadas y Molina, 2016), están presentes hoy día en los documentos curriculares de primaria en diferentes países (Morales et al., 2018), incluido España (Real Decreto, 2022). En Kieran (2022) se realiza una revisión de investigaciones previas sobre pensamiento algebraico en edades tempranas, y coinciden en la necesidad de profundizar en dicho pensamiento por parte de los estudiantes de primeras edades.

Este estudio lo centramos en el concepto de variable y en sus formas de representación, y justificamos su importancia con base en todo lo anterior. Vamos a dar respuesta con este trabajo a preguntas como ¿Qué observamos sobre la interpretación de la variable en relación funcional? ¿Qué representaciones usan los alumnos para representar la variable? En todo momento con el objetivo de describir las evidencias del uso de la variable en relación funcional encontradas en un grupo de 24 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años) al comparar funciones.

Pensamiento Funcional

Autores como Dubinsky y Harel (1992), señalan que la idea de función es considerada una de las más importantes en la matemática y, por lo tanto, se ha de tomar como eje central de la educación matemática. Como señalan Cañadas y Molina (2016), cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del *early algebra*. Estas mismas autoras describen el pensamiento funcional como “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 211), el cual es beneficioso para los estudiantes por su conexión con otros contenidos matemáticos, otras áreas de conocimiento y cursos educativos superiores. Dentro del marco de la propuesta *early algebra*, existen estudios que evidencian que los niños presentan capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde cursos tempranos (Blanton y Kaput, 2011), lo cual potencia la viabilidad de que este pensamiento sea nutrido por el currículo y por la enseñanza. Cabe destacar que dentro del pensamiento funcional es de suma importancia el significado que se le da tanto a la variable, como a su representación.

La variable

El pensamiento funcional depende de la comprensión de ciertas ideas clave, de entre las cuales la variable es fundamental. El concepto de variable es problemático para los estudiantes debido a que se utiliza con diferentes significados (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Por su parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente tres usos de la variable: (a) incógnita específica, (b) número general y (c) relación funcional. Con base en esta última idea, la investigación más amplia de la que forma parte este estudio, la centramos en la identificación de estos tres usos de la variable.

Así pues, apoyaremos nuestro estudio en un modelo que ayuda a la identificación de estas tres interpretaciones: el *Modelo 3UV*. Este modelo fue propuesto por Ursini y Trigueros (2006), y en él se presenta una descomposición del concepto de variable en el cual se incluyen, la

capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los tres usos de la variable considerados. Según este Modelo, la interpretación de la variable en relación funcional se identifica mediante los siguientes aspectos característicos:

- F1: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica (interpretar);
- F2: determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente (interpretar y manipular);
- F3: determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente (interpretar y manipular);
- F4: reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación (interpretar);
- F5: determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra (manipular);
- F6: expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema (simbolizar).

Las acciones que vienen entre paréntesis se corresponden con la modificación realizada al Modelo 3UV y explicada más adelante en la metodología.

Por otro lado, según Smith (2017), existen tres tipos de relaciones en las funciones lineales que involucran valores de las variables, y estas son la recurrencia, la correspondencia y la covariación, y considera que hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los alumnos las relaciones de correspondencia o covariación.

Los sistemas para representar cantidades indeterminadas y relaciones funcionales son variados, entre ellos encontramos el lenguaje natural, tablas, gráficos, símbolos algebraicos o representación pictórica. Radford (2012) habla también de formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales.

Metodología

Tomamos para este trabajo una sesión dentro de un experimento de enseñanza, sobre la que realizamos un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva (Cortés e Iglesias, 2004). Llevamos a cabo este estudio con un grupo de 24 estudiantes de quinto de educación primaria con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, y concretamente en esta sesión se les propuso una tarea escrita, de respuesta abierta, sobre la comparación de las funciones $2x$ y $3x-7$, elaborada *ad hoc* por los investigadores. Dicha tarea es la siguiente:

Juan tiene ahorrado algo de dinero (solo tiene euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos: te doblo tu dinero o te triplico tu dinero y tú me das 7 euros.

Juan quiere elegir el mejor trato. ¿Qué debe hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato. ¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?

Con tus compañeros de equipo resume vuestras conclusiones en la cartulina. Luego utilizaréis la cartulina para explicar vuestras conclusiones al resto de la clase.

Hubo varias fuentes de información: ficha de trabajo y cartulina escrita, y videograbaciones y audiograbaciones de las sesiones.

Para caracterizar las respuestas y analizar más específicamente cómo los alumnos interpretaron, simbolizaron y manipularon, realizamos una ampliación del Modelo 3UV. Esta ampliación añade la asignación de cada uno de los aspectos característicos de la interpretación de la variable analizada con uno de estos tres conceptos vistos como acciones, a saber: manipular, simbolizar o interpretar. Esta asignación aparece más arriba en el apartado anterior y la realizamos en función de la acción que, como investigadores, consideramos que se desarrolla con cada uno de los ítems del modelo.

Organizamos la clase en 5 grupos, y asignamos una letra a cada uno, por lo que tenemos los grupos A, B, C, D y E. De cada grupo tenemos un vídeo de la presentación final, (excepto del Grupo E) y luego varios vídeos, de unos grupos una cantidad y de otros otra, de la realización de la ficha y la cartulina. Principalmente lo que analizamos fueron las transcripciones de todos los vídeos de los distintos grupos participantes, atendiendo a expresiones, lenguaje y también a los gestos, además de las cartulinas realizadas por cada grupo.

Resultados

Comenzamos mostrando que, al resolver esta tarea de comparación de funciones, los estudiantes pusieron en juego algunos conceptos asociados a la relación funcional.

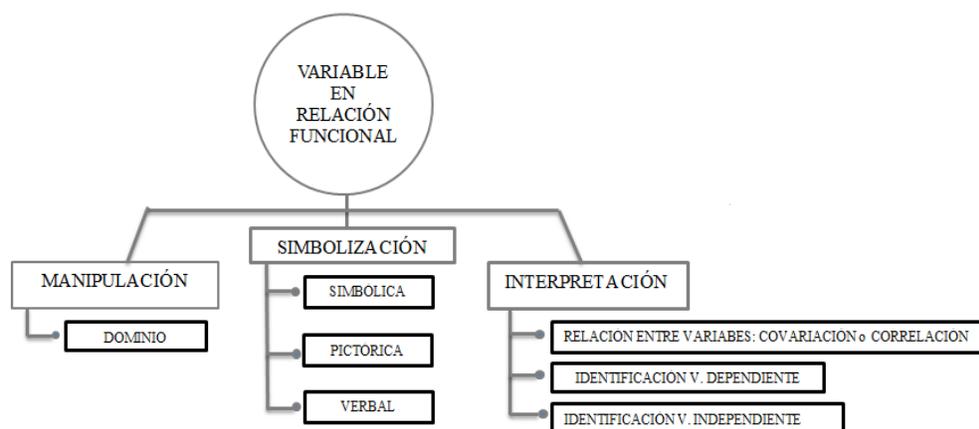


Figura 1. Mapa Conceptual Resultados.

Dentro de la acción de manipulación se identificó la aproximación al concepto de dominio. Con este hacemos alusión a las aportaciones de los alumnos que evidenciaron la identificación por parte de los mismos de los valores que puede tomar la variable independiente de cada función involucrada. Este ítem lo incluimos dentro de la acción de manipular puesto que los alumnos lo que hacían era manipular una y otra vez la relación funcional, probando, para ver los valores que sus variables podían tomar. Una evidencia en relación a este concepto es la siguiente:

- si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2° porque no tiene 7 euros. Aquí podrían estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 2\}$. (Transcripciones Grupo A).

Las diferentes formas encontradas de representar la variable y la relación funcional fueron representación simbólica, representación pictórica y representación verbal o natural. La representación verbal o natural fue la más identificada. En los vídeos y en las producciones escritas se evidencia que esta es la forma principal mediante la cual el alumnado expresó y se comunicó con el pensamiento funcional en lo cual coincidimos con Radford (2012). Un ejemplo de esta representación es el siguiente:

- Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293. (Transcripciones Grupo D).

La representación simbólica se identificó siempre que se hizo uso de letras o símbolos para representar la variable, como se puede ver en la Figura 2.

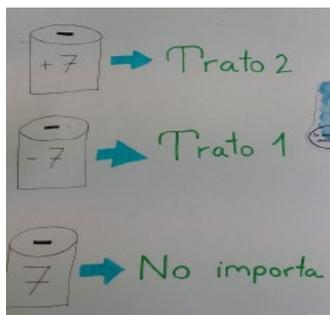


Figura 2. Representación simbólica Grupo D

La representación pictórica se identificó siempre que se hizo uso de los dibujos para representar la variable. Esta última únicamente se identificó en un caso, que se puede ver en la Figura 3.

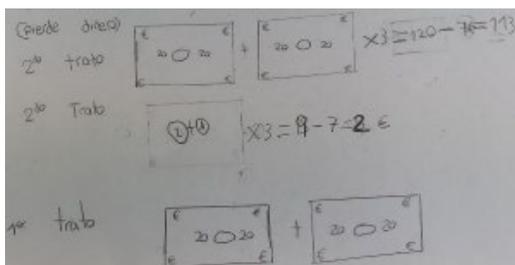


Figura 3. Representación pictórica Grupo E.

Y terminamos con la acción de interpretar, en la cual aparecen tres conceptos, a saber: la relación entre variables, la identificación de la variable dependiente y la identificación de la variable independiente. En el primero de estos ítems identificamos dos tipos de relación, la covariación y la correlación. Evidencias de estos tipos de relación son:

- *Depende del dinero que tenga.* (Covariación: Grupo E).
- *Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* (Correlación: Grupo D).

Los últimos dos conceptos los consideramos en total relación con este último, siempre que se identifica la relación entre variables se va a identificar al menos una de las variables, y va a surgir la necesidad de identificar qué variable es la dependiente en el problema (en el ejemplo de covariación del grupo E están identificando que la variable independiente es el dinero que tiene).

Conclusión

El análisis del concepto de variable en esta tarea de comparación de funciones pone de manifiesto que los alumnos son capaces de interpretar la variable en relación funcional y que surgen conceptos matemáticos en el proceso. Estos conceptos matemáticos son el dominio, la representación simbólica, la pictórica, la verbal, además de las relaciones de correlación y covariación y la identificación tanto de la variable dependiente como de la independiente. Así, en base a lo defendido por Smith (2017) e indicado en los antecedentes, podemos afirmar que se evidencia relación funcional entre estos alumnos de quinto de primaria. Como conclusión final afirmamos que prestamos el apoyo a todos los autores mencionados que defendían que los alumnos a esas edades son capaces de pensar algebraica y funcionalmente, aunque cierta parte de la comunidad docente considere lo contrario.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Bibliografía y Referencias

- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, y E. Knuth, *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (págs. 5-23). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). *Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades*. En E. Castro, E. Castro; J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218).Comares.
<http://funes.uniandes.edu.co/8379/>
- Cortés, M. e Iglesias, M. (2004). *Generalidades sobre Metodología de la Investigación*. Universidad Autónoma del Carmen. <http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1750>.
- Dubinsky, E., y Harel, G. (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *Mathematical Association of America (MMA)*.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education*.54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>.
- Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. 36(3), 59-78. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472>.

- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 6(4), 117-133. <https://doi.org/10.30827/pna.v6i4.6139>.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 52, (24386- 24504). <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157>
- Schoenfeld, A. H., y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher*, 81(6), 420-427. <https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420>
- Smith, E. (2017). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton, *Algebra in the early grades* (págs. 133-160). Alan H. Schoenfeld. <https://doi.org/10.4324/9781315097435>.
- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática*, 6(03), 90-108. <http://funes.uniandes.edu.co/9736/>
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿ Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38. <http://funes.uniandes.edu.co/13136/>