

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Construcción de modelos matemáticos en libros de texto de ecuaciones diferenciales para ingenieros

Jazmín Adriana **Juárez** Ramírez

Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México

jjuaresr@ipn.mx

José María **Chamoso** Sánchez

Facultad de Educación, Universidad de Salamanca

España

jchamoso@usal.es

Resumen

La modelación matemática puede apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales al acercar las matemáticas a contextos reales e integrarlas con otras áreas del conocimiento. Se presenta un estudio realizado con diversos libros de texto de ecuaciones diferenciales para analizar la forma en que muestran la construcción de modelos a los estudiantes de ingeniería en términos de la definición de modelo matemático y la estructura del proceso de modelación. Los resultados señalan que la mayoría de los textos analizados abordan el proceso de modelación matemática de forma parcial. Se concluye que es necesario que los textos utilizados en ingeniería presenten un proceso de modelación que incluya la formulación y solución del modelo, un análisis detallado de la solución, así como la validación del modelo.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales; Educación matemática; Enseñanza presencial; Educación superior; Investigación descriptiva; Modelos y modelación; Planeamiento educativo.

Introducción

En las carreras de ingeniería, la matemática es una herramienta fundamental ya que tanto durante el proceso de formación, así como en la vida profesional, los estudiantes resuelven problemas en los que describen, modelan y resuelven situaciones técnicas (Trejo, Camarena y

Trejo, 2013). Sin embargo, aunque algunos estudiantes reconocen la utilidad de las matemáticas, otros se cuestionan la importancia y la utilidad de las asignaturas cursadas. Esto puede deberse a que en los primeros cursos universitarios de matemáticas se presentan pocos problemas para que los estudiantes construyan modelos para representar situaciones reales.

La mayoría de los planes de estudio de las carreras de ingeniería incluyen la asignatura ecuaciones diferenciales, ya que una gran variedad de fenómenos presentes en ciencias y en ingeniería se representan con funciones que incluyen derivadas totales o parciales. El estudio de las ecuaciones diferenciales es una excelente oportunidad para mostrar la aplicación de las matemáticas a la vida real y presentar la naturaleza de la investigación en matemáticas (Arslan, 2010).

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales se ha centrado en métodos analíticos, y esto ha originado una comprensión limitada de lo que representa la solución en una situación real. Sin embargo, independientemente del enfoque de enseñanza, los estudiantes presentan dificultades al formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones resultantes y predecir el comportamiento de las soluciones (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007). El proceso de modelación matemática se enseña de manera parcial, evitando enfrentar a los alumnos con etapas de este proceso (Córdoba, 2011).

Algunas investigaciones que han analizado el proceso de modelación con ecuaciones diferenciales con alumnos universitarios (Barbarán y Fernández, 2014; Camarena, 2009; Hernández, 2009); revelaron dificultades en la comprensión de los estudiantes tanto del concepto de ecuación diferencial como de su solución. Es importante la interpretación física de los términos de una ecuación diferencial y poder traducirlos a una expresión matemática y que, al desarrollar actividades relacionadas con la modelación, los estudiantes comprendan e interpreten el concepto de ecuación diferencial (Guerreo, Camacho y Mejía, 2010; Soon, Tirtasanjaya y McInnes, 2011).

Por otro lado, en el área de matemáticas, los libros de texto caracterizan el proceso de enseñanza aprendizaje más que en otras áreas y tienen una influencia significativa en las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas (Hadar, 2017). Sin embargo, en las asignaturas de matemáticas para ingeniería, la práctica de la modelación matemática se basa en las aplicaciones como problemas propuestos en los libros de texto y en modelos concretos que los estudiantes resuelven como ejercicios.

Lo expuesto anteriormente, condujo a la realización de un estudio en el que se revisaron algunos libros de texto de ecuaciones diferenciales utilizados en carreras de ingeniería con el objetivo de analizar la forma en que tratan el concepto de modelo matemático y el proceso de modelación.

Marco teórico

Como parte de los trabajos que clasificaron las diferentes aproximaciones teóricas a la modelación, Kaiser y Sriraman (2006), reportaron el desarrollo de diferentes perspectivas de investigación:

Perspectiva realista

Tiene origen en el hecho de que los modelos matemáticos están siendo ampliamente utilizados en muy diversas disciplinas científicas y tecnológicas, y en muchos contextos sociales. El proceso de modelación es llevado a cabo como un todo y no como un proceso parcial.

Perspectiva contextual

Esta perspectiva considera la modelación matemática como un tipo especial de solución de problemas, y por lo tanto los aspectos psicológicos de la resolución de problemas se consideran como una base para la comprensión de los problemas de aprendizaje relacionados con el modelado matemático y la modelación matemática para la enseñanza en la perspectiva contextual.

Perspectiva educativa

La idea principal de la perspectiva educativa es la integración de modelos y modelización en la enseñanza de las matemáticas, tanto como medio de aprendizaje de las matemáticas, como una competencia importante por sí misma.

Perspectiva cognitiva

El interés principal es comprender las funciones cognitivas que se activan en las actividades individuales del estudiante durante la modelización matemática. Por lo que se analizan los procesos de modelado de los estudiantes, para reconstruir sus rutas individuales a través del proceso de modelado en situaciones de modelado específicas. El objetivo es identificar barreras cognitivas individuales en los procesos de modelización.

Perspectiva socio-crítica

Pone énfasis en el papel de las matemáticas en la sociedad, y reclama la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las matemáticas (en la sociedad), el rol y naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática (en la sociedad). En esta perspectiva, se hace la distinción entre la modelación matemática hecha por modeladores profesionales y las actividades de modelación realizadas en la escuela.

Perspectiva epistemológica

A diferencia de la perspectiva realista, se le da menos importancia al aspecto real de los ejemplos con que se trabaja. Cualquier actividad matemática es susceptible de modelarse, así la modelación no está limitada a la matematización de cuestiones extra matemáticas.

Por otro lado, los libros de texto son herramientas mediadoras que traducen y concretan significados incluidos en un currículo establecido por organismos educativos y lo hacen a través de una presentación didáctica (Occelli y Valeiras, 2013). El libro de texto se destaca por su uso y presencia sobre una gran diversidad de medios didácticos y audiovisuales que la sociedad actual

ofrece a los profesores para desarrollar su actividad profesional (Bautista, 2017). En el aula de matemáticas, los libros de texto han ejercido diferentes papeles tales como: objeto de estudio, material de consulta, registro de actividades del alumno, colección de ejercicios y problemas (González y Sierra, 2004). Algunas investigaciones han clasificado el análisis de libros de texto en áreas tales como el papel del libro de texto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la búsqueda de similitudes y diferencias en los libros de texto de matemáticas, y la investigación sobre cómo el libro de texto configura las formas de enseñar y aprender matemáticas (Fan, Zhu y Miao, 2013).

En términos del análisis de textos de ecuaciones diferenciales, se ha determinado que la mayoría comienza con definiciones básicas de las ecuaciones diferenciales en cuanto al orden, grados, variables utilizadas, derivadas ordinarias o parciales. Hernández (2009) destacó que algunos aspectos relevantes en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales son que se estudian de forma muy aislada con relación a su contexto, la enseñanza se centra en el procedimiento, el significado gráfico de la solución está ausente y se ve limitado a soluciones que se presentan en las aplicaciones, y pocos textos que hacen énfasis sobre los aspectos gráficos.

Al estudiar el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales para identificar las dificultades de los estudiantes al modelar un problema de la vida real, Rodríguez (2010) analizó libros de texto de ecuaciones diferenciales para identificar los pasos del proceso de modelación matemática y observó que en los problemas propuestos las variables están designadas explícitamente y en la mayoría se proporciona el modelo. Rodríguez (2010) señaló que este análisis pone en evidencia que la escritura de un modelo matemático, etapa importante del proceso de modelación, es un tipo de tarea poco solicitada en el aula.

Metodología

Contexto y muestra de estudio

El estudio se llevó a cabo en el contexto de los planes de estudio de las 34 carreras de ingeniería que se ofrecen en las diversas facultades del Instituto Politécnico Nacional (IPN), institución pública mexicana de investigación y educación en niveles medio superior, superior y posgrado. Posteriormente se revisó el plan de estudios de cada una de las ingenierías y se determinó que en 21 de éstas se imparte la asignatura ecuaciones diferenciales, y que en la mayoría de las carreras se cursa durante el primer año de estudios. Posteriormente se compararon los programas sintéticos de la asignatura de las diversas carreras y se encontraron 15 programas diferentes, ya que algunas carreras comparten el mismo programa de la asignatura. Para cada uno de estos programas, se identificaron los libros de texto que se presentan en la bibliografía y se encontraron 8 libros de texto comunes: Boyce y Diprima (2007), Boyce y Diprima (2001), Carmona y Filio (2011), Kiseliiov, Krasnov y Makarenko (2005), Nagle, Saff y Snider (2005), Spiegel (2001), Zill (2009), Zill y Cullen (2008).

Caracterización de los libros de texto

El análisis de libros de texto en este estudio se enfocó en la construcción de modelos matemáticos. Para cada libro se registró: 1) La definición de modelo matemático, y 2) La

presentación del proceso de modelación matemática. Posteriormente se organizaron en tablas, de acuerdo a estas dos definiciones, tal como se muestra en el siguiente ejemplo (Tabla 1):

Tabla 1

Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática
Carmona, I., y Filio, E. (2011). *Ecuaciones Diferenciales*. México: Adisson-Wesley.

Modelo matemático	Sin definición
Proceso de modelación matemática	<p>La matemática es una abstracción de la realidad. Es poner en símbolos lo que nos rodea. Es una herramienta poderosa que nos conduce a través de la aplicación rigurosa de sus leyes y de la lógica a soluciones precisas. Ante una situación real: ajuste de especificaciones en las áreas de ingeniería, sistemas computacionales, economía, etc. El camino por seguir es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Establecer la ecuación diferencial que traduce fielmente al lenguaje simbólico el fenómeno a estudiar. • Catalogar y resolver dicha ecuación. • Analizar la solución.

Resultados

Los resultados muestran que uno de los libros (Kiseliov et al., 2005), no presenta la definición de modelo matemático, ni el proceso de modelación matemática. Sin embargo, incluye ejemplos de cambio de volumen para mostrar la aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden, así como problemas propuestos de cambio de velocidad, ley de enfriamiento de Newton, disolución de una sustancia, entre otros.

Llama la atención que solamente dos de los textos contienen la definición de modelo matemático (Zill, 2009; Zill y Cullen, 2008) e incluyen la relación entre las matemáticas y los sistemas físicos, así como situaciones de la vida real. Hay que mencionar que el texto más utilizado en la asignatura ecuaciones diferenciales de acuerdo con los planes de estudio revisados es el libro de Zill (2009).

En referencia a la descripción del proceso de modelación matemática se presenta como un procedimiento que consta de tres etapas o fases. Los textos mencionados anteriormente definen las acciones a seguir en cada uno de los pasos del proceso de modelación matemática, excepto el texto de Carmona y Filio (2011), que solamente menciona los pasos de un “camino a seguir” sin describir en qué consiste cada uno de ellos.

Excepto el texto de Kiseliov et al. (2005), todos incluyen como parte importante del proceso de modelación matemática el planteamiento de una ecuación diferencial a partir de leyes físicas o empíricas; sin embargo, solamente tres (Nagle et al., 2005; Zill, 2009; Zill y Cullen, 2008) mencionan previamente que se deben identificar las variables que intervienen en el sistema por modelar. Al respecto solamente Boyce y Diprima (2007); Boyce y Diprima (2001) mencionan el término “razón de cambio” al traducir una ley empírica en una ecuación diferencial.

En términos de la solución de las ecuaciones diferenciales resultantes al plantear un modelo matemático, solamente Spiegel (2001) menciona que la ecuación resultante debe ser sujeta a condiciones específicas. Previo al cálculo de la solución de la ecuación diferencial resultante Nagle et al. (2005) proponen a los estudiantes hacer una serie de preguntas con el objeto de que reflexionen sobre el desarrollo que han llevado a cabo.

Como última fase o paso del proceso de modelación, todos los textos mencionan llevar a cabo un análisis de la solución, al respecto Nagle et al. (2005), Zill (2009), Zill y Cullen (2008) señalan que debe “validar” el modelo comparando los resultados con datos conocidos. Solamente Spiegel (2001) señala la importancia de graficar el resultado como parte del análisis de la solución.

Una vez que se llevó a cabo el proceso de análisis de la solución Spiegel (2001), Zill (2009), Zill y Cullen (2008), sugieren repetir los pasos del proceso de modelación hasta obtener un resultado razonable. Son pocos los libros que incluyen diagramas al describir el proceso de modelación matemática (Boyce y Diprima, 2007; Boyce y Diprima, 2001; y Zill. 2009; Zill y Cullen, 2008).

Conclusiones

Esta investigación ha permitido entre otras cosas reconocer la importancia de analizar e interpretar la solución de una ecuación diferencial relacionada con el modelo matemático de una situación real. En términos de la validez, algunos textos señalan que es un paso importante que no debe pasarse por alto, sin embargo, en los cursos que se imparten en las carreras de ingeniería la mayoría de los ejercicios se terminan cuando se obtiene la solución sin contrastar los resultados con datos conocidos. Debe señalarse que son escasos los textos que sugieren analizar la solución de una solución mediante una gráfica, lo que enfatiza que se sigue fomentando el enfoque analítico. Se debe mencionar que ante el hecho de que los textos no den importancia a la aplicación de condiciones iniciales como parte importante del proceso de modelación matemática, aunque luego lo hagan con los ejercicios, ocasiona que los estudiantes no tengan una visión clara de lo que significan las condiciones iniciales para un sistema físico o un situación de la vida real.

La mayoría de los libros analizados contienen ejercicios y problemas de aplicación similares con ecuaciones de primer y segundo orden para situaciones tales como: desintegración radiactiva, ley de enfriamiento de Newton, crecimiento o decrecimiento de una población, circuitos en serie RL , LC y RLC , movimiento armónico, mezclas químicas. Esto puede resultar de gran ayuda para los estudiantes en la comprensión del proceso de modelación, sin embargo, si se busca que a través de los libros de texto se puedan experimentar las matemáticas como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria, es necesaria una revisión de los textos de acuerdo con los objetivos de las asignaturas.

Por lo tanto, las observaciones realizadas a partir de la revisión de los libros de texto han permitido determinar la necesidad de proponer en el aula un proceso de modelación matemática que incluya la construcción del modelo, la solución del modelo resultante y un análisis detallado

de la solución, sin olvidar la validación del modelo propuesto, y que los libros de texto sean una herramienta seleccionada de tal manera que puedan apoyar este proceso.

Una implicación educativa derivada de los resultados de este estudio puede ser una propuesta para modificar el programa de la asignatura de ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería para integrar la práctica de la modelación matemática como una unidad de aprendizaje fundamental, con el propósito de propiciar en el estudiante habilidades para relacionar la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática y su aplicabilidad, así como estimular su creatividad al formular y resolver problemas.

Este trabajo puede ofrecer futuras líneas de investigación. Por ejemplo, se podría considerar repetir la investigación realizada con el análisis de libros de texto de otras asignaturas del currículum de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales tales como cálculo, que está relacionada con la asignatura de ecuaciones diferenciales, y en la que se estudia el proceso de modelación matemática.

Referencias y bibliografía

- Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is? *Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 41(7), 873-888. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486448>
- Barbarán, J.J. y Fernández, J. A. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 173-186. <https://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1122>
- Bautista, R. M. (2017). *Un análisis en los libros de texto del concepto de producto punto y su enseñanza, basado en la teoría del pensamiento matemático avanzado*. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- Boyce, W. y Diprima, R. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley.
- Boyce, W. y Diprima, R. (2007). *Ecuaciones diferenciales. Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones*. México: Patria.
- Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 87-106). Tenerife, España: SEIEM.
- Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.
- Carmona, I. y Filio, E. (2011). *Ecuaciones Diferenciales*. México: Addison-Wesley.
- Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633-646.

- González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos de la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.
- Hadar, L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2017.10.002>
- Hernández, M. A. (2009). *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*. Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 303-310.
- Kiseliov, A., Krasnov, N. y Makarenko, G. (2005). Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú: MIR.
- Nagle, K., Saff, E. y Snider A. (2001). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera*. México: Addison Wesley-Longman.
- Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los Libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 133-152.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: El caso de las ecuaciones diferenciales. *RELIME*, 13, 191-210.
- Soon, W., Tirtasanjaya, L. y McInnes, B. (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(8), 1023-1039. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.573867>
- Spiegel, M. (2001) *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall.
- Trejo, E., Camarena, P. y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, 11, 397-424.
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage Learning.
- Zill, D. y Cullen, M. (2008). *Matemáticas aplicadas para ingeniería, Vol. 1. Ecuaciones diferenciales*. México: McGraw-Hill.