Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional

Luis Miguel **Amador** Silva
Departamento de Matemáticas, Maestría en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
a221230134@unison.mx
José Ramón **Jiménez** Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Posgrados en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
joseramon.jimenez@unison.mx

Resumen

Se presentan los avances[1] de un proyecto de intervención didáctica que pretende atender ciertas deficiencias curriculares, relacionadas con la formación en los estudiantes de maneras variacionales de pensar, mediante el desarrollo de una propuesta didáctica sustentada en el enfoque del pensamiento variacional. Para lograr este objetivo, metodológicamente se considera imprescindible apoyarse en una interpretación del concepto "pensamiento variacional" que, además de ser clara y unívoca, sea coherente con su génesis y evolución, que permita generar hipótesis plausibles sobre cómo fomentar este tipo de pensamiento en los estudiantes. El análisis crítico de la literatura especializada sugiere que el pensamiento variacional exige una manera dinámica de pensar, en la cual el papel principal lo ocupan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos esencialmente distintos de las funciones. La realización didáctica se centra en el estudio de la covariación exponencial discreta en el bachillerato, desde la perspectiva de las sucesiones numéricas.

Palabras clave: Pensamiento variacional; Razonamiento variacional; Razonamiento covariacional; Magnitud variable; Cambio en progreso; Covariación exponencial.

[1] *Nota*: Al momento de la redacción de este reporte el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la fase de planeación y proceso de la implementación preliminar del diseño de intervención didáctica.

Justificación y planteamiento de la problemática

La Secretaría de Educación Pública (2017), en los Planes de Estudio de Educación Media Superior en el campo disciplinar de matemáticas, plantea una red de competencias que deben desarrollar los estudiantes, entre ellas, "construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos variacionales" (pp. 78-79). Sin embargo, en tales documentos no se proporciona al docente ninguna explicación sobre qué procedimientos son considerados variacionales o no y porqué, y mucho menos se le proporcionan ejemplos de tales procedimientos. Tampoco en la literatura especializada de investigación en Matemática Educativa encontramos fácilmente tales explicaciones y ejemplos claros, ni una descripción desprovista de ambigüedades del significado de términos que son amplia y libremente usados, como "pensamiento variacional", "procedimientos variacionales", "estrategias variacionales", etcétera. En muchas ocasiones se les utiliza sin preocupación alguna por, al menos, caracterizarlos, no digamos definirlos con cierto rigor o precisión. En estas condiciones, tanto el docente como el investigador se guían por sus propias interpretaciones, no necesariamente concordantes con las de sus colegas.

Hace tiempo, Vasco (2003) reflexionaba sobre la forma incorrecta en la que se ha interpretado al pensamiento variacional, enfatizando que éste no consiste en la memorización de fórmulas, menos en saberse la definición de función, debido a su tratamiento estático; ni tampoco consiste en dibujar por el procedimiento de punteo gráficas cartesianas, al contrario, estos aspectos obstaculizan y dificultan el pensamiento variacional en los estudiantes, paralizan la covariación al restringirse a la forma estática de una gráfica. Aspecto que entra en contradicción con la dinamicidad que exige el pensamiento variacional.

Antecedentes

En las investigaciones relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional, es fácil percatarse que el término ha sido utilizado con diferentes significados y desde distintas perspectivas. A nuestro juicio, sin embargo, no presentan una descripción que sea coherente con la génesis (epistemológica y cognitiva) y evolución de dicho tipo de pensamiento matemático. Para algunos investigadores (Báez et al., 2017; Posso Torres, 2020), el desarrollo del pensamiento variacional está relacionado con el estudio de las funciones numéricas, la construcción de gráficas cartesianas conjuntistas, el análisis de tales gráficas y su representación tabular. Otros investigadores (Caballero y Cantoral, 2013) conciben que el desarrollo del pensamiento variacional debe suceder mediante la interacción de los elementos característicos del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar); para Mariño et al. (2021) el pensamiento variacional se caracteriza como un flujo de acciones e interacciones permanentes entre subprocesos de particularizar, conjeturar, relacionar, formalizar y probar. Sin embargo, las actividades que utilizan los autores en sus propuestas se enfocan principalmente en relaciones entre números en tablas y en el análisis de gráficas cartesianas de funciones conjuntistas, esto contradice la dinamicidad que exige el pensamiento variacional (Vasco, 2003; Jiménez, 2020; Jiménez et al., en prensa).

Como resultado de nuestro análisis crítico de la literatura especializada sobre el tema, hemos llegado a concebir que el pensamiento variacional está directamente relacionado con el estudio de las *magnitudes variables*. Concebimos a las magnitudes variables como aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicos. Las magnitudes variables realmente varían. Están por doquier presentes en los así llamados fenómenos o procesos de variación y cambio. En el pensamiento variacional el papel protagónico lo desempeñan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos de una naturaleza esencialmente distinta a la de las funciones, mientras que éstas figuran sólo como actores secundarios, como una de las herramientas emergentes para la matematización de las magnitudes variables y de los procesos en que ellas intervienen (Jiménez et al., en prensa).

Al estudiar el cambio nos enfocamos en la manera en cómo una magnitud variable cambia o varía con respecto a otra. Thompson et al. (2019) consideran que el uso que se le da a este término resulta ser ambiguo en contextos matemáticos. Afirman que la manera adecuada de interpretarlo consiste en concebir que el cambio que experimentan las magnitudes variables en procesos o fenómenos de variación está sucediendo de manera progresiva en ese momento, es decir, que tiene la connotación de "cambio en progreso". Las magnitudes variables varían teniendo un trasfondo temporal, aun y cuando el tiempo no sea una variable relevante. Esta manera de concebir los fenómenos de variación hace imprescindible recurrir al uso de tecnologías dinámicas para su estudio en el salón de clase.

En el estudio presentado por Jiménez et al. (en prensa), así como por Thompson y Carlson (2017), los autores conciben que el pensamiento variacional está constituido por dos componentes: el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, ambos tienen que ver con la conceptualización matemática de las magnitudes variables. En el primer caso, se despliega el razonamiento y trabajo matemático sobre una sola magnitud variable en la recta numérica, y en el segundo, el razonamiento simultáneo y el trabajo matemático sobre dos magnitudes variables en el plano cartesiano.

Objetivo

La intención primaria de nuestro trabajo consiste en elaborar una propuesta didáctica basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial, para desarrollar maneras variacionales de pensar en los estudiantes, superando las visiones estáticas, procedimentales y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se sustenta en la concepción de Harel (2008), quien afirma que el objetivo principal de la educación matemática consiste en desarrollar en el estudiante el pensamiento matemático, y que éste se compone de un conjunto de *maneras de entender* y *maneras de pensar*. El autor define a las maneras de entender como el producto cognitivo particular de un acto mental realizado por una persona, y a las maneras de pensar como las características cognitivas de un acto mental realizado por una persona, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras de entender.

Por lo tanto, concebimos que para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes se deben diseñar estrategias de aprendizaje que le permitan generar maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar. A las *maneras variacionales de entender* las definimos como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características o propiedades esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de cambio en progreso, y a las *maneras variacionales de pensar* como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas realizadas por el estudiante, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras variacionales de entender.

Por ejemplo, si un estudiante formula una interpretación, similar o igual, argumentando que "las variables algebraicas son símbolos que escogemos de manera conveniente para representar aspectos cuantitativos esenciales de cierta realidad que intentamos comprender", está evidenciando una manera variacional de entender, porque es un producto cognitivo particular de su acto mental de interpretar una característica importante de las magnitudes variables. Y si sostiene más de una manera variacional de entender es probable que posea, además, la manera variacional de pensar que "las magnitudes variables pueden estar representadas por diferentes símbolos o literales, según convenga".

En nuestro trabajo, hemos identificado y caracterizado una serie de maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar, en los términos más generales, esto es, referidas a cualquier proceso de variación. A partir de ellas, hemos identificado y caracterizado una serie de maneras variacionales de entender más específicas, relacionadas con los procesos de variación exponencial, las cuales orientarán el diseño de nuestra secuencia de actividades didácticas, para que los estudiantes del nivel medio superior desarrollen un conjunto de imágenes, ideas y herramientas variacionales, estudiando situaciones extra matemáticas relacionadas con la covariación exponencial. Lamentablemente, no hay espacio aquí para analizar con detalle este punto. Más adelante en este documento, en las Tablas 1 y 2, se presentan de manera resumida algunas de dichas maneras variacionales de entender la covariación exponencial.

Descripción general de la propuesta preliminar de intervención didáctica

El diseño didáctico comprende tres etapas, cada una de ellas enfocadas en algunas de las *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial (MVdE-CExp)* que se espera desarrollar en los estudiantes. Obviamente, se abordan en primer término las maneras de entender consideradas como las más simples o elementales. En las dos primeras etapas se consideran situaciones que involucran casos de covariación discreta, tanto creciente como decreciente, y en la tercera etapa se consideran situaciones que involucran covariación continua.

Etapa Introductoria

En la etapa introductoria se espera promover la imagen dinámica de la fenomenología del crecimiento y decrecimiento exponencial, así como la identificación del comportamiento exponencial que tiene una magnitud variable y su representación dinámica en el plano cartesiano. Las actividades cognitivas que se plantean en esta etapa involucran las siguientes *MVdE-CExp.*

Tabla 1
Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial.

MVdeE-CExp1	Una magnitud variable de comportamiento exponencial se caracteriza por el hecho de que su factor de crecimiento o decrecimiento es igual a una constante positiva (mayor o menor que la unidad).
MVdeE-CExp2	Los valores numéricos consecutivos de una magnitud variable de comportamiento exponencial forman una sucesión geométrica (creciente o decreciente), $y_{n+1} = ry_n,\ r$ es la razón de la sucesión geométrica.

Fuente: Elaborado por los autores.

Etapa Intermedia

En la etapa intermedia se pretende que los estudiantes identifiquen, analicen y expresen de manera algebraica importantes relaciones cuantitativas entre los valores numéricos de las magnitudes variables (independiente y dependiente), involucradas en cada una de las situaciones planteadas en la etapa introductoria. Entre ellas, las relaciones suma-multiplicación, resta-división considerando cambios unitarios y arbitrarios, positivos y negativos. Estas relaciones cuantitativas en buena medida caracterizan la esencia de la covariación exponencial, y subyacen al entendimiento del concepto de logaritmo y sus propiedades. Las actividades cognitivas que se plantean en esta etapa involucran las siguientes *MVdE-CExp.*

Tabla 2
Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial.

MVdeE-CExp3	Si la magnitud variable independiente x aumenta (disminuye) una unidad, entonces la magnitud variable dependiente se incrementa (decrementa) por un factor constante r, y ese factor constante es la base de la expresión algebraica exponencial para esa relación de covariación.
MVdeE-CExp4	Si la magnitud variable independiente x aumenta (disminuye) n unidades, entonces la magnitud variable dependiente aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior en forma proporcional: $m(x \pm n) = m(x) \cdot r^{\pm n}$.
MVdeE-CExp5	Una magnitud variable m covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable x, sí para dos valores cualesquiera de ésta $x_1 y\ x_2 = x_1 + h$, los correspondientes valores de m satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 + h) = m(x_1) \cdot m(h)$.
MVdeE-CExp6	Una magnitud variable m covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable x, sí para dos valores cualesquiera de ésta $x_1 y\ x_2 = x_1 - h$, los correspondientes valores de m satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 - h) = \frac{m(x_1)}{m(h)}$.

Fuente: Elaborado por los autores.

Hasta esta etapa se ha llegado en el momento de escritura de este reporte.

Etapa final

En la etapa final se espera introducir la noción de función exponencial como modelo de la covariación exponencial, pero ahora a partir de situaciones realistas de covariación continua.

Resultados esperados

La intención primaria de nuestro trabajo es presentar una propuesta didáctica basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial, para desarrollar maneras variacionales de pensar en los estudiantes, superando las visiones estáticas, procedimentales y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase. En virtud de ello, el resultado más importante que se espera consiste en obtener evidencia sólida que permita valorar si nuestra propuesta contribuye o no a promover en el estudiante el desarrollo de maneras variacionales de pensar en un contexto centrado en el estudio de la covariación exponencial. Esperamos poder constatar si fue o no posible lograr que el estudiante identifique y formule algunas de las características cuantitativas esenciales de la covariación exponencial, a partir de la coordinación conjunta y simultanea entre los valores numéricos de magnitudes variables que intervienen en fenómenos, y que se modelan mediante sucesiones aritméticas y geométricas.

Los avances presentados hasta el momento dan lugar a que posteriormente pueda llevarse a cabo el refinamiento del diseño didáctico, la implementación oficial del mismo, y abordar las acciones relacionadas con la fase de valoración y análisis, para continuar con el desarrollo del proyecto de intervención didáctica.

Referencias y bibliografía

Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, Olga L., y Pérez, R. (2017). Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería. Formación universitaria, 10(3), 93-106. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010

Caballero, M., y Cantoral Uriza, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/4217/

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. EMA, 8, 121-156 http://funes.uniandes.edu.co/1520/1/98_Carlson2003Razonamiento_RevEMA.pdf

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf

Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics / El nivel cero del razonamiento covariacional en la educación secundaria. https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR-1655990-Jimenez.pdf

Jiménez Rodríguez J. R., Grijalva Monteverde A., Milner, F. A., Dávila Araiza M. T., y Romero Félix C. F. (en prensa). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora. México.

Mariño, L.F, Falk de Losada, M., y Hernández, R.V, (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. Eco Matemático, 12 (1), 13-25. http://funes.uniandes.edu.co/23412/

Posso Torres, J. (2020). Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática. Universidad del Valle. http://hdl.handle.net/10893/17958

Secretaría de Educación Pública, SEP (2017). Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. http://sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Thompson, P. W., Ashbrook, M., y Milner, F. (2019). Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology. Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Vasco Uribe, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010). http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/index.html