Construcción de Superficies Acotadas y Sólidos no Convencionales en GeoGebra AR

Alejandro Isaías **Flores** Osorio
Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Perú
pcmaaflo@upc.edu.pe
Dennis Alberto **Espejo** Peña
Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Perú
pccedesp@upc.edu.pe
Lenin Rolando **Cabracancha** Montesinos
Ciencias, Universidad Tecnológica del Perú
Perú
c19009@utp.edu.pe

Resumen

El presente taller tiene por objetivo de capacitar a los docentes en el uso de GeoGebra y establecer el uso de esta herramienta en la construcción y diseño de superficies acotadas y de sólidos no convencionales que se presentan el curso de cálculo multivariable. Realizar el esbozo de las gráficas de superficies y sólidos no convencionales conlleva una gran dificultad para ser graficadas mediante la forma tradicional, es decir a lápiz y papel, usando GeoGebra AR permite acoplar los conceptos matemáticos en su vista gráfica 3D y extenderlas a un entorno de realidad aumentada. El uso de la geometría dinámica permite que el estudiante pueda obtener una comprensión de los conceptos teóricos y plasmar sus aplicaciones en forma interactiva en un entorno visual espacial de las superficies y sólidos; dicha interacción se convierta en una herramienta potencial de aprendizaje significativo.

Palabras clave: GeoGebra AR, Superficies Acotadas, Sólidos no Convencionales, Parametrización.

Introducción

Realizar la construcción del esbozo de gráficas en el espacio tridimensional concierne una dificultad mayor si nos limitamos solamente a efectuarlas en una superficie plana, es decir, a lápiz y papel (Flores et al., 2022) el desarrollar estas gráficas conlleva a tener un buen criterio de abstracción y de experiencia basada en el ensayo y error hasta establecer un criterio óptimo para graficar en forma aceptable superficies acotadas y sólidos no convencionales en R^3. Esta dificultad se presenta los estudiantes de ingeniería en el curso de cálculo de varias variables, en el cual tienen que representar superficies acotadas y sólidos no convencionales en R^3. Según Flores y Espejo (2022) la aplicación de GeoGebra AR permite establecer la conexión entre el objeto matemático y el entorno virtual y de esta manera se obtiene una inmejorable visualización, percepción, manipulación y comprensión del esbozo de superficies y de sólidos no convencionales y que a su vez hacen posible proyectar estos sólidos sobre un proyección sobre un plano coordenado y realizar una descripción ordenada para luego calcular el volumen o masa de dicho sólido, mediante una integral iterada (Espejo y Flores, 2022)

Ante esta situación Massa (2015) menciona que la creación de ambientes enriquecidos con TIC puede propiciar ambientes más flexibles para el aprendizaje, eliminan barreras de espacio y tiempo para la interacción entre el profesor y los estudiantes, incrementen la comunicación y el aprendizaje autónomo.

También, Ortiz (2012) y Scaglia (2008) coinciden que hay muy poco énfasis en preparar a los futuros docentes a utilizar en forma eficaz el software GeoGebra en una clase real. Y es bajo las recomendaciones y reflexiones de estos investigadores que presentamos el taller: Construcción de superficies acotadas y sólidos no convencionales mediante GeoGebra AR, en donde el objetivo principal es de capacitar al docente en el manejo de las herramientas comandos y sintaxis que el software GeoGebra presenta en su plataforma web.

Fundamento Matemático

Para realizar las construcciones de las superficies y de los sólidos no convencionales, establecemos los siguientes conceptos del cálculo multivariable y que se va a enlazar con la vista gráfica 3D de GeoGebra mediante los comandos curva y superficie.

Curva Paramétrica

Según Payá (2008), un conjunto $\Gamma = \{\gamma(t)/a \leq t \leq b\}$ en $\mathbb{R}^3$ es una curva paramétrica, o simplemente una curva en $\mathbb{R}^3$ y que el camino γ recorre o parametriza Γ. Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son, respectivamente, el origen y el extremo del camino γ. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es un camino cerrado.

Si $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es un camino en el espacio, entonces se puede escribir de la forma siguiente:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

Donde x, y, z son funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Decimos entonces que la curva C establecida por el camino γ tiene ecuaciones paramétricas de la forma.

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{2}$$

Superficie Paramétrica

Según Larson (2010) sean las funciones x, y y z de variables u y v, continuas en un dominio D del plano uv. Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \tag{3}$$

Se le denomina superficie paramétrica. Además, las ecuaciones

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{4}$$

Son las ecuaciones paramétricas de la superficie. Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial $\mathbf{r}$, entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D.

Conjunto Convexo

Según Besada (2001), un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A,\ tx + (1 - t)y \in A$, para todo $t \in [0, 1]$.

Coordenadas Cilíndricas

Según Larson (2010), un punto $P(x, y, z)$ en el espacio es representado por la terna ordenada (r, θ, z), donde (r, θ) es una representación en coordenadas polares de la proyección del punto en el plano coordenado XY y z es la distancia dirigida de (r, θ) al punto P, tal como se muestra en la figura

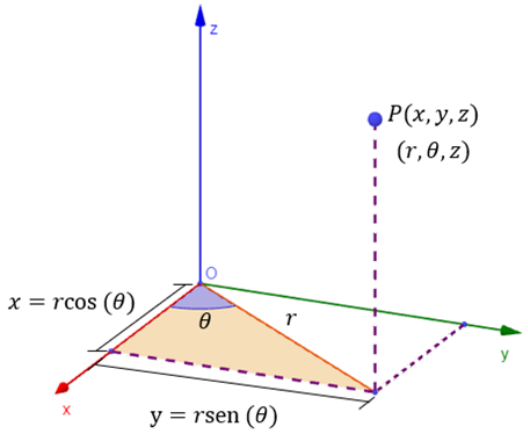

Figura 1. Coordenadas cilíndricas.

Para la conversión de coordenadas, de rectangulares a cilíndricas y viceversa y se utiliza la siguiente relación.

De coordenadas cilíndricas a rectangulares

$$\begin{cases} x = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sen(\theta) \\ z = z \end{cases}, \qquad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \vee -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \tag{5}$$

De coordenadas rectangulares a cilíndricas.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}, \qquad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \vee -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \tag{6}$$

Coordenadas Esféricas

Según Larson (2010), Las coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \emptyset)$ de un punto P en el espacio, donde $\rho = |OP|$ es la distancia desde el origen al punto P, θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas ($0 \leq \theta \leq 2\pi$ o $-\pi \leq \theta \leq \pi$), y $\emptyset$ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Observe que, $\rho \geq 0$, $0 \leq \emptyset \leq \pi$

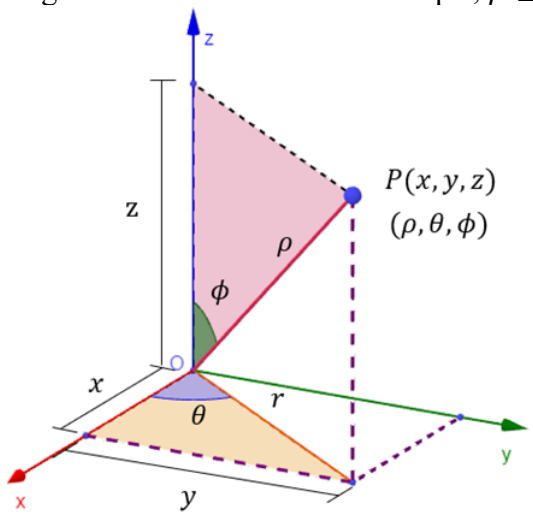

Figura 2. Coordenadas esféricas

Para la conversión de coordenadas, de rectangulares a cilíndricas y viceversa y se utiliza la siguiente relación.

De coordenadas esféricas a rectangulares.

$$\begin{cases} x = \rho\ \text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\ \text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta) \\ z = \rho\ \cos(\phi) \end{cases} \tag{7}$$

De coordenadas rectangulares a esféricas.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan(\phi) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{8}$$

Las definiciones matemáticas que se han presentado permiten la construcción y diseño de superficies en el espacio y que se enlazan al entorno de GeoGebra mediante los siguientes comandos.

Comandos de GeoGebra

A continuación, presentamos la sintaxis de dos comandos de GeoGebra que van a permitir enlazar y visualizar las definiciones matemáticas presentadas con la vista gráfica 3D de GeoGebra y extenderlas a un entorno de realidad aumentada. Estos comandos de acuerdo a la Wiki de GeoGebra tienen la siguiente sintaxis.

Comando Curva

$Curva(< Expresión >, < Expresión >, < Expresión >, < Parámetro >, < Valor\ inicial >, < Valor\ final >)$

Da por resultado la curva paramétrica correspondiente determinada por las expresiones x (primera <Expresión>), y (segunda <Expresión>) y z (tercera <Expresión>) definidas en función del parámetro, dentro del intervalo definido por [Valor inicial, Valor final]

Comando Superficie

$Superficie(< Expresión >, < Expresión >, < Expresión >, < Parámetro\ 1 >, < Valor\ inicial\ 1 >, < Valor\ final\ 1 >, < Parámetro\ 2 >, < Valor\ inicial\ 2 >, < Valor\ final\ 2 >)$

Da por resultado la superficie cartesiana paramétrica 3D correspondiente a las expresiones x (primera <Expresión>), y (segunda <Expresión>) y z (tercera <Expresión>) indicadas, utilizando los dos <Parámetros> en sus correspondientes intervalos [Valor inicial, Valor final].

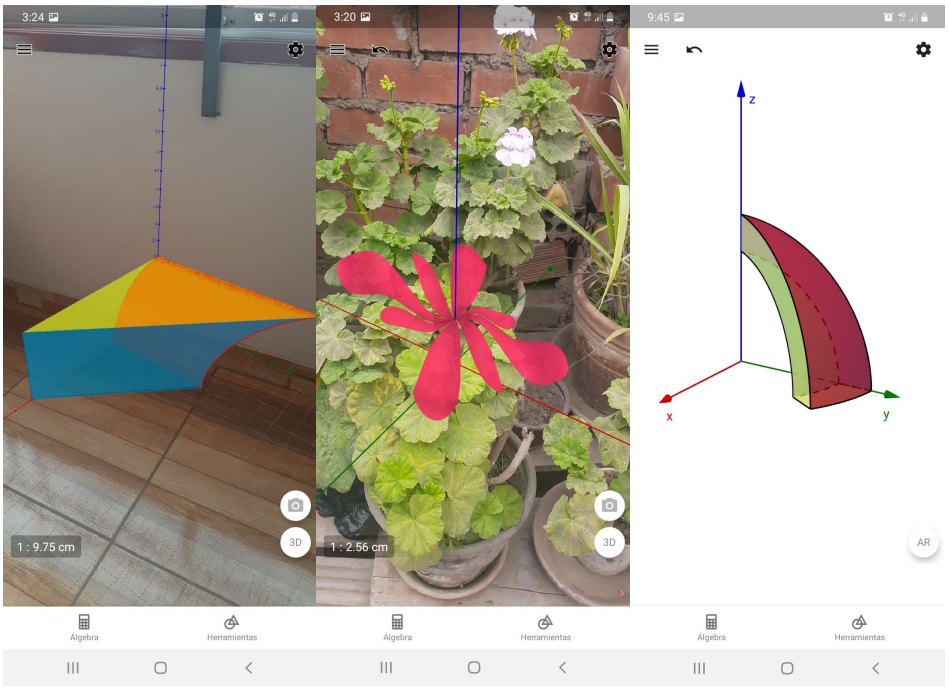

Figura 3. Superficies desarrolladas en GeoGebra AR.

Metodología

La metodología que se estableció con los estudiantes es de investigación-acción, en el cual los expositores hicieron una indagación y aplicación de los comandos, propiedades y sintaxis que involucran el esbozo de curvas, superficies y sólidos en la vista gráfica 3D del GeoGebra, este conocimiento fue transmitida y aplicada por los estudiantes en el cual lograron ejecutar los comandos que relacionan la parametrización de superficies, su respectiva gráfica, y finalmente establecer una descripción de los sólidos sobre un plano coordenado, este conocimiento ha permitido desarrollar sesiones de clases dinámicas y con un aprendizaje significativo en el estudiante.

Conclusiones

La aplicación de GeoGebra en dispositivos móviles permite visualizar superficies acotadas y sólidos no convencionales en forma dinámica e interactiva, estas construcciones dependen de la parametrización de las superficies, en donde se observa la relación entre los conceptos matemáticos y la sintaxis de GeoGebra, que permiten visualizarlas en su vista gráfica 3D y al extender estas construcciones mediante su herramienta de realidad aumentada a nuestro entorno real permiten que los objetos matemáticos sean manipulables.

Referencias y bibliografía

Besada, M., García, F., Mirás, M., Vásquez, C.: Cálculo de varias variables. Cuestiones y ejercicios resueltos, 1st edn, pp. 154–156. Prentice Hall, Madrid (2006)

Comando Curva. (s. f.). Geogebra.org. Recuperado 28 de octubre de 2022, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Curva

Comando Superficie. (s. f.). Geogebra.org. Recuperado 28 de octubre de 2022, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Superficie

Espejo-Peña, D.A., Flores-Osorio, A.I. (2023). Modeling Bounded Surfaces Using Cylindrical Coordinates Using GeoGebra AR. In: Cheng, LY. (eds) ICGG 2022 - Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2022. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 146. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13588-0_76

Flores-Osorio, A.I., Espejo-Peña, D.A. (2023). Design of Surfaces in Cylindrical Coordinates Using GeoGebra AR. In: Cheng, LY. (eds) ICGG 2022 - Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2022. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 146. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13588-0_58

Flores-Osorio, A.I., Lobo-da-Costa, N.M., Espejo-Peña, D.A., Cabracancha-Montesinos, L.R. (2022). Convexity in the Design of Bounded Surfaces and Unconventional Solids Using GeoGebra AR. In: Mesquita, A., Abreu, A., Carvalho, J.V. (eds) Perspectives and Trends in Education and Technology. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol 256. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-5063-5_28

Larson, R., Edwards, B.: Cálculo 2 de varias variables, 9th edn, pp. 825, 1102. McGraw Hill, México, D.F. (2010)

Massa, S. y Pirro, A. (2015). *Formación docente universitaria en competencias para la incorporación de las TICs: dimensiones de análisis*. Recuperado de: http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/4148/1/VE14.315.pdf.

Payá, R.: Lección 3: Curvas en el plano o en el espacio. Homepage https://www.ugr.es/~rpaya (2008). Last accessed 20 Oct 2022

Ortiz, A. y Arias, R. (2012). Geogebra como herramienta para la enseñanza de la matemática: resultados de un curso de capacitación. VIII Festival Internacional de Matemática. Costa Rica. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Andres-Ortiz.pdf

Scaglia, S. y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. REIEC. Argentina. Recuperado de: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662008000100004