



Aplicación del PVA para la optimización de rutas: un recorrido entre volcanes

Cristin **Solano** Pérez
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

cristin.solano@ucr.ac.cr

Josías **Castillo** Valdivia
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

josias.castillo@ucr.ac.cr

Lisandro **Cortes** Brenes
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

lisandro.cortes@ucr.ac.cr

Kervin **Navarro** Ortiz
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

kervin.navarro@ucr.ac.cr

Resumen

En el presente trabajo se plantea la aplicación de Problema del Vendedor Ambulante (PVA) para la optimización de rutas, específicamente, se plantea y resuelve un problema en el que un grupo de personas necesita conocer la ruta más óptima entre una cantidad de volcanes para realizar un recorrido, para lo que se hace uso del programa MATLAB. Aunado a ello, se propone una actividad dirigida a estudiantes universitarios avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, con la intención de mostrar la utilidad del PVA en la optimización matemática; se espera además que los mismos reconozca las facilidades que ofrecen los softwares matemáticos dentro del contexto educativo y ante situaciones donde el cálculo manual se torna casi imposible.

Palabras clave: Optimización; PVA; MATLAB; Actividad de Aprendizaje; Trazo de Rutas; Recorridos; Software Matemático.

1. Introducción

El tema del presente trabajo es la aplicación del PVA para la optimización de rutas, buscando dar solución a problemas contextualizados que implican una dificultad al momento de

resolverlos de forma manual, ya que conforme aumenta la cantidad de lugares por recorrer o visitar, el problema se torna factorial lo que torna imposibles los cálculos manuales.

La finalidad del presente trabajo de investigación es brindar una herramienta tecnológica-educativa que permita a las personas docentes y en formación en el área de las matemáticas, analizar y resolver problemas de optimización con mayor facilidad y comodidad a partir de un enfoque no tradicional que permite innovar sus formas de enseñanza y actualizar los métodos de aprendizaje del estudiantado. En cuanto a la actividad propuesta para desarrollar en un taller, se pretende enseñar cómo utilizar la herramienta de MATLAB para trazar rutas sobre un mapa, con la idea de motivar a realizar más trabajos experimentales que involucren procedimientos similares.

Como metodología se pretende desarrollar una actividad con un grupo de estudiantes universitarios avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, en donde resuelvan poco a poco el problema propuesto en este trabajo con el objetivo de que descubran la dificultad de resolver manualmente el problema a partir de cinco puntos de referencia. Además, se espera que las personas participantes intuyan la fórmula para determinar la cantidad de rutas óptimas que se pueden trazar con los diferentes lugares establecidos en el problema.

En cuanto a la estructura que conforma el presente trabajo, inicialmente se describe trabajo. Seguidamente, se plantean los elementos teóricos en los cuales se destacan las principales ideas matemáticas del problema en cuestión. Luego, se da el planteamiento de la situación-problema con la que se trabaja. Después, se presentan los resultados obtenidos al ejecutar el código en el programa MATLAB. Finalmente, se describe la actividad de aprendizaje propuesta y algunas reflexiones centradas los logros, dificultades y desafíos de desarrollar y darle solución al proyecto.

2. Descripción del trabajo

Inicialmente, para la comprensión del PVA se plantea un problema en el que hay cuatro ciudades por recorrer (A, B, C, D), la idea de ese planteamiento es encontrar manualmente la ruta más corta entre las cuatro ciudades, considerando que solamente se puede pasar una sola vez por cada una de las ciudades y que la ciudad inicial debe ser el mismo punto de llegada; el objetivo de plantear este problema fue comprender el proceso para llegar a obtener una ruta óptima.

Al realizar el proceso experimental con las cuatro ciudades se logra deducir la cantidad de rutas totales que se pueden trazar, además se observa que esa cantidad total va a depender de la cantidad de puntos establecidos. A partir de este procedimiento se llega a conocer los distintos enfoques que tiene el PVA y se realiza el pertinente estudio de códigos en MATLAB para optimización de rutas; en paralelo se plantea una situación-problema sobre un grupo de personas que desean visitar varios volcanes y requieren conocer la ruta más corta.

Establecida la situación-problema y el código que proporciona la ruta más corta se propone desarrollar una actividad de aprendizaje que implique resolver la situación-problema planteada para el trabajo, la cual permita enseñar a utilizar el código y la herramienta dentro de MATLAB que traza la ruta “real”, teniendo como fin el mostrar la utilidad del programa en la optimización de rutas y sus beneficios tecnológicos-educativos.

3. Elementos teóricos

3.1. Problema del Vendedor Ambulante

Anaya et al. (2016) definen el PVA como un problema de optimización en el que una persona debe realizar un recorrido entre ciudades considerando visitar cada ciudad una sola vez y que el punto de partida sea el mismo punto de llegada. La aplicación del PVA ayuda a encontrar la ruta más corta para cumplir un objetivo, a lo cual se le conoce como la ruta óptima.

3.2. Matemática detrás del PVA.

Este problema se puede definir formalmente como lo plantea Buthainah (como se citó en Anaya et al. (2016)) como una cadena de elementos $G[N, A, C]$ que está dada por N cantidad de nodos (puntos), A el conjunto de arcos y C matriz, con entradas c_{ij} , donde c_{ij} es el coste (distancia) de moverse de un nodo i a un nodo j ; el proceso intrínseco que sigue el problema del viajero es el mismo que se plantea con los ciclos de Hamilton, en donde se busca recorrer todos los puntos, buscando además recorrer dichos puntos con un costo mínimo.

Para este problema se establecen tres condiciones según Corral (2020), la primera de ellas es que exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente después de la ciudad i , la segunda condición es que exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente antes de la ciudad j y la tercera condición es que se deben eliminar aquellas rutas que tras visitar una ciudad regresan al punto de partida sin terminar el recorrido completo”.

Función objetivo: definidas las tres condiciones anteriores, es utilizada la variable C_{ij} . Esta función busca el recorrido con la distancia total más corta. Para ello, se calcula el sumatorio de todos los caminos elegidos, es decir, cuando $X_{ij} = 1$ y a estos se les multiplica la distancia que supone recorrer dicho camino.

$$\text{mín} \sum_i^n \sum_j^n C_{ij} X_{ij}$$

3.3 Explicación del método de solución del problema

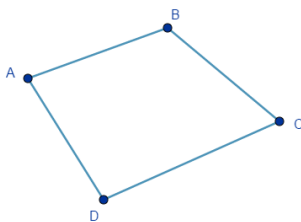


Figura 1. Ruta entre las cuatro ciudades.

Suponiendo que se desea trazar la ruta más óptima entre cuatro ciudades A, B, C y D mediante la aplicación del PVA, se debe saber que hay una serie de condiciones a seguir, las cuales fueron mencionadas en el apartado anterior. Por la primera condición se sabe que exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente después de la ciudad inicial; si se empieza por el punto A, la condición nos dice que debemos ir a otro punto que no sea A; por ejemplo, ir de A a B.

Luego, por la segunda condición sabemos que exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente antes de la última ciudad; por ejemplo, cuando llegamos al punto B sabemos

que ya hemos pasado anteriormente por la ciudad A entonces debemos continuar a la siguiente y no regresar a la A. Si consideramos ahora la ciudad C, entonces volvemos a aplicar la primera condición a la ciudad B y seguimos así sucesivamente aplicando las dos condiciones a cada punto hasta llegar a la última ciudad. Aplicando dicho proceso obtenemos todas las rutas posibles para las cuatro ciudades A, B, C y D.

Tabla 1
Total de rutas posibles entre las ciudades A, B, C y D.

Rutas posibles			
A-B-C-D	B-A-C-D	C-A-B-D	D-A-B-C
A-B-D-C	B-A-D-C	C-A-D-B	D-A-C-B
A-C-D-B	B-C-D-A	C-B-D-A	D-B-C-A
A-C-B-D	B-C-A-D	C-B-A-D	D-B-A-C
A-D-B-C	B-D-A-C	C-D-A-B	D-C-A-B
A-D-C-B	B-D-C-A	C-D-B-A	D-C-B-A

Fuente: elaboración propia.

3.4. Enfoque del problema

Antes de emplear la función objetivo descrita en uno de los apartados anteriores, se debe resaltar que el PVA puede tener dos tipos de enfoque: simétrico o antisimétrico, siendo la principal diferencia entre estos la cantidad “real” de distancias que existen entre las diferentes rutas. Para el desarrollo de este trabajo se utiliza un enfoque simétrico para el cual Corral (2020) señala que es un problema en el que el coste de trasladarse de una ciudad *i* hasta una ciudad *j* es el mismo que ir de *j* hacia *i*.

Con respecto a la cantidad de rutas posibles, estas se pueden generalizar mediante la fórmula $(n - 1)!$, donde *n* representa el número de ciudades por visitar. Con el enfoque simétrico esa cantidad total de rutas se reduce a la mitad pues al ir de un punto a otro o viceversa, la distancia que se ocupa recorrer es la misma, utilizando entonces la fórmula $\frac{(n-1)!}{2}$.

4. Planteamiento de la situación-problema

Suponiendo que un grupo de personas desea realizar un recorrido por los volcanes Turrialba, Irazú, Poás, Rincón de la Vieja y Miravalles; considerando que el punto de partida puede ser cualquiera de los cinco volcanes, nace la incógnita de ¿cuál sería la ruta más óptima para realizar dicho recorrido si el punto de llegada debe ser el mismo punto de partida?

Tabla 2
Matriz simétrica de distancias entre volcanes.

Volcanes	1.Irazú	2.Turrialba	3.Poás	4.Miravalles	5. Rincón de la Vieja
1.Irazú	0	20.4 km	91.5 km	253 km	293 km
2.Turrialba	20.4 km	0	102 km	263 km	303 km
3.Poás	91.5 km	102 km	0	198 km	239 km
4.Miravalles	253 km	263 km	198 km	0	45.6 km
5. Rincón de la Vieja	293 km	303 km	239 km	45.6 km	0

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 2 hace referencia a las distancias que hay entre cada uno de los volcanes, esta misma se toma como la matriz simétrica a utilizar en el código de MATLAB que brinda la ruta más corta entre dichos volcanes.

5. Resultados de ejecutar el código en MATLAB

Se observa que al hacer variaciones con respecto al punto de partida se obtienen rutas distintas que presentan la misma distancia total por recorrer, lo que responde a un problema de combinatoria. Por ejemplo, una de las rutas óptimas que proporciona el programa es la siguiente:

Inf	20.4000	91.5000	253.0000	293.0000
20.4000	Inf	102.0000	263.0000	303.0000
91.5000	102.0000	Inf	198.0000	239.0000
253.0000	263.0000	198.0000	Inf	45.6000
293.0000	303.0000	239.0000	45.6000	Inf

El recorrido mas corto entre los diferentes puntos es : 658.5km, el cual esta definido por la ruta : 3 4 5 2 1

Figura 2. Ruta óptima.

La ruta 3 4 5 2 1 corresponde a realizar el siguiente recorrido entre volcanes: Poás - Miravalles - Rincón de la Vieja - Turrialba - Irazú, teniendo una distancia total de recorrido de 658.5 km.

5.1. Corrección del trazo de la ruta

Al resolver la situación-problema planteada aplicando el PVA se tiene como objetivo no solo encontrar la distancia más corta sino mostrar el trazo de la ruta sobre el mapa; inicialmente el código lanzaba ese trazo de forma poligonal, siendo este un nuevo desafío a enfrentar pues las expectativas iban más allá de esos resultados. Para solucionar el problema del trazo hubo que investigar y explorar el programa MATLAB para determina que existe una herramienta en dicho programa que con la ayuda de *Google Maps*, crea un trazo “animado” de la ruta donde se contemplan los relieves. Para este logro fue necesario determinar las coordenadas de cada uno de los volcanes en *Google Maps* y agregarlas a un archivo de Excel para importarlas al entorno de MATLAB, correr el código y así obtener el resultado deseado. A continuación, se muestran imágenes de ambos trazos para realizar una comparativa.

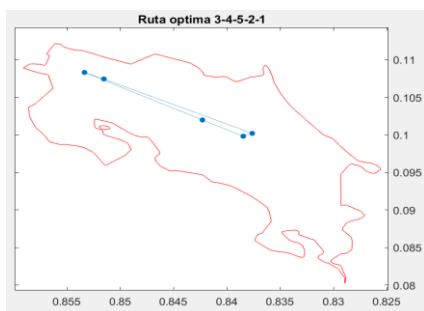


Figura 3. Trazo poligonal de la ruta entre volcanes.

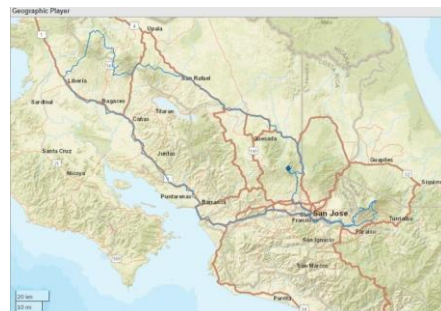


Figura 4. Trazo con relieve de la ruta entre volcanes.

6. Actividad de aprendizaje

Los participantes deben resolver de forma manual la situación-problema planteada en el presente trabajo, implicando que para encontrar la ruta más corta entre los volcanes inicien sus cálculos manualmente considerando solamente tres volcanes, luego agregar un cuarto volcán y finalizar la actividad con el cálculo de cinco volcanes.

Con esta actividad se espera que los estudiantes a participar logren deducir la fórmula que da la cantidad de rutas óptimas según la cantidad de puntos de referencia considerados en el problema y además interioricen el concepto de factorial. Como cierre de la actividad se pretende enseñar a manipular el código de MATLAB sobre PVA como recurso facilitador del procedimiento para la solución del problema.

7. Reflexiones

Las posibilidades que se tuvo desde un inicio fue la de utilizar y aprender programación básica en MATLAB pues con ello se nos permitió el explorar y comprender códigos relacionados al PVA con el fin de aplicarlos a nuestro problema para obtener los resultados del presente trabajo.

Aunado a lo anterior, el hacer posible el trazo de la ruta de forma no poligonal es considerado como el máximo resultado de este trabajo pues en las referencias bibliográficas consultadas no se encontraron investigaciones que desarrollaran algo similar, incluso, para el docente guía de este trabajo resultó también innovador lo logrado pues desconocía cómo hacerlo posible, mencionando además nunca haber visto el desarrollo de dicho problema hasta tal nivel.

Asimismo, lo anterior resultó un desafío pues al no contar con investigaciones previas que desarrollaran un trazo más real de la ruta óptima que proporciona el programa, hubo la necesidad de realizar experimentos de prueba y error dentro de MATLAB para lograr la gráfica; en ese proceso experimental hubo algunas dificultades, por ejemplo, tener que extraer las coordenadas geográficas de cada una de las rutas entre los volcanes en *Google Maps* (esto teniendo ya la ruta más corta gracias al programa), guardarlas en un documento de Excel que se carga a MATLAB, ya que de esa manera se almacenan los datos y es posible obtener la ruta de forma animada.

Finalmente, el realizar este trabajo permitió abrir una puerta sobre el uso de herramientas tecnológicas para la innovación educativa, dando paso a la propuesta de la actividad de aprendizaje que se describió anteriormente. Además, se crea reflexión sobre los beneficios y facilidades que ofrece el uso de un entorno de programación para atender problemas matemáticos.

8. Referencias

- Anaya, G., Hernández, E., Seck, J. y Medina, J. (2016). Solución al Problema de Secuenciación de Trabajos mediante el Problema del Agente Viajero. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 13(4), 430-437 <https://doi.org/10.1016/j.riai.2016.07.003>
- Balderrama, V. (2013). Modelo de ruteo para maximizar la cantidad de precios recopilados por el programa “quién es quién en los precios” (Doctoral dissertation, Tesis Maestría, Universidad Nacional Autónoma De México, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, México).
- Carapaz Caranqui, J. M. (2014). La utilización del software MATLAB como herramienta didáctica en el aprendizaje de la matemática, de los estudiantes de quinto semestre de la carrera de Física y Matemática de la FECYT, universidad Técnica del Norte durante el año lectivo 2013-2014. Propuesta alternativa (Bachelor's thesis). <http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/4155>

- Corral Sánchez, A. (2020). Estudio experimental de diferentes modelos matemáticos para resolver el problema TSP. (Trabajo Fin de Grado Inédito). Universidad de Sevilla, Sevilla.
<https://hdl.handle.net/11441/105754>
- García, J. e Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, 4(7)
<https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>
- GONZALEZ, J. L. R. (2015). Rediseño de las rutas de recolección de residuos sólidos urbanos en el municipio de León, Guanajuato, México. Recorrido mínimo AG-TPS-google.
<http://ciatec.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1019/112>
- Mendoza Guamán, E. F., & Cullay Ashqui, S. J. (2018). Optimización de las operaciones logísticas, en las rutas urbanas de recolección de desechos sólidos en la empresa pública Municipal GIDSA Ambato (Bachelor's thesis, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo).
<http://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/9600>
- Vergara, G., Avilez, A., & Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. *Revista MATUA* ISSN: 2389-7422, 3(1).
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/view/1512>