Significados Parciales de la Integral Definida desde un estudio histórico en Newton y en Leibniz

Weimar **Muñoz** Villate
Universidad de La Salle y Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wmunoz@unisalle.edu.co
Olga Lucía **León** Corredor
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
olleon@udistrital.edu.co

Resumen

El propósito de esta investigación es identificar vínculos entre: (i) argumentos históricos que configuraron el Teorema Fundamental Cálculo (TFC); (ii) recursos tecnológicos que actualizan esos argumentos; (iii) efectos en la didáctica del cálculo, de los recursos y de su actualización. Los nuevos significados parciales para la integral definida que se muestran como efecto de estos vínculos, son el resultado de una metodología multimodal que articula la historiografía aplicada a los documentos de Newton y de Leibniz, con las metodologías del Enfoque Ontosemiótico (EOS) en lo que refiere a la identificación de idoneidades mediacionales y epistemológicas.

Palabras clave: Teorema fundamental del cálculo, integral definida, Leibniz, Newton, significados parciales.

Introducción

La pregunta ¿qué tipo de objetos hacen parte de la formación matemática en programas como el de ingeniería? se articula con la pregunta sobre ¿qué tipos de significados sobre esos objetos promueven los profesores en sus prácticas docentes? La teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) destaca: la complejidad de los objetos matemáticos en tanto los reconoce no como un objeto unitario, sino como un sistema complejo formado por componentes o partes (Rondero & Font, 2015); y la necesidad de considerar significados parciales de estos objetos "en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios, activados en estas prácticas" (Rondero & Font, 2015, p. 31).

En el caso de la formación de ingenieros a finales del S. XIX: "se planteaba la controversia acerca de qué tipo de formación matemática debería darse a los ingenieros; los dirigentes del país tenían un especial interés por lo práctico, lo técnico y lo productivo" (Castro, 1997, p. 9), esta controversia se mantiene vigente hasta el siglo XXI. El profesor de matemáticas que forma ingenieros se enfrenta a decisiones como: considerar las estructuras matemáticas como el único objeto de formación matemática para el ingeniero o, considerar las aplicaciones de las matemáticas como la razón fundamental de la utilidad de la matemática en la formación del ingeniero (ICMI, 2002). Las prácticas de enseñanza de lo que actualmente es reconocido como Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) también sobrelleva dichos problemas. En efecto, el primer inconveniente de considerarlo complicado se debe a sus conceptos matemáticos implícitos y explícitos (Kirsch, 2014; Robles et al., 2014; Fuente et al., 2010; Tall, 1992). La segunda postura problemática se adopta porque, en el mejor de los casos, el TFC sólo es recordado por su utilidad (Bressoud, 2011; Toumasis, 1993). Sin embargo, el proceso de enseñanza y aprendizaje del TFC tiene dificultades para muchos docentes, porque es frecuente que algunos de ellos tengan un bajo conocimiento conceptual, incluso a veces procedimental, de la integral definida (Rosyidi & Kohar, 2018). También, porque muchos profesores no saben cómo mejorar su ambiente de enseñanza, o crear secuencias didácticas que busquen la mejora de la comprensión del teorema, además de no considerar la complejidad de los objetos matemáticos que se enseñan (Robles et al., 2014). Complementariamente surgen preguntas como ¿cuál versión del TFC se requiere en la formación de ingenieros?

Para los estudiantes, los obstáculos al comprender el TFC, radican en la dificultad de comprender otros objetos matemáticos, tales como función, continuidad, derivada e integral, o de relacionarlos entre sí, e.g. comprender la correspondencia entre la integral definida y el área. Estas dificultades conducen a ideas no permanentes y poco cohesionadas entre ellas, que conlleva a que los alumnos se conformen con imágenes mentales que tienen sólo aspectos parciales de una definición o de algún ejemplo particular (Thompson & Dreyfus, 2016; Kouropatov & Dreyfus, 2013; Cordero, 2003; Coelho, 1998; Thompson, 1994; Dreyfus, 1990). El TFC algunas veces no es teorema, ni es fundamental para los estudiantes (Thompson & Dreyfus, 2016).

Estas problemáticas no son las únicas. Siempre que se aborda un estudio sobre el TFC se debe considerar que "el teorema fundamental es una piedra angular adecuada para cualquier desarrollo riguroso del cálculo" (Dunham, 2005, p. 90), y además que emerge un cuestionamiento inmediatamente: ¿a cuál TFC se hace referencia? Se suele presentar, por ejemplo, entre todas las versiones que existen del TFC (Fullerton, 2003) e incluso de lo que es recordado por algunos profesores (Toumasis, 1993), la siguiente versión:

Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$,

(1) Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x)=f(x)$.

(2) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ donde F es una antiderivada de f, es decir, $F'(x)=f(x)$, (Stewart, 2015)

Como un elemento de esta problemática hay que señalar que cada texto universitario aborda el TFC desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, alternan el orden de (1) y (2), o varían presentando primero la integral definida o el problema del área, y posteriormente, la integración por sustitución o las sumas de Riemann (Stewart, 2015; Larson & Edwards, 2014; Zill & Wright, 2010; Thomas, 2006).

Desde la educación matemática universitaria se han ofrecido diferentes soluciones, por ejemplo, las que se desarrollan desde las huellas que los problemas de enseñanza y aprendizaje del TFC dejan y que se plantean a la comunidad de investigadores. En esta perspectiva, se cuenta con un estudio de caso de la transposición didáctica de la demostración del TFC (Klisinska, 2005); otra investigación que indaga sobre la comprensión del vínculo entre derivadas e integrales (Coelho, 1998); otra más que plantea definir de otra manera los diferenciales, y desde allí, tener otra perspectiva del TFC (Biehler et al., 2017; Thompson, 1994); y desde el marco de la abstracción reflexiva, se cuenta con el análisis del concepto de integral definida (Aranda & Callejo, 2015). Se dispone de investigaciones alrededor de la parte evaluativa del TFC (Ponce, 2014) y también sobre cómo los estudiantes lo aplican a problemas físicos y gráficos (Bajrachrya, 2014). Lo anterior también se vincula a la relación que el EOS manifiesta en:

> La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia”(Godino & Batanero, 1994, p. 4).

En el caso específico del TFC la génesis cultural a la que alude el EOS está vinculada a las reflexiones personales de Newton y de Leibniz. Los dos investigadores llegaron al TFC resolviendo un problema común y de gran dificultad de la época: el problema inverso de las tangentes y su relación con aquel de hallar áreas (Scriba, 2014). Además, como aspecto de total relevancia: ambos ofrecieron lo que se reconocería hoy en día como tablas de integración, mostrando así un algoritmo para el uso de la solución que plantearon (Muñoz-Villate, 2021; Scriba, 2014; Bressoud, 2011). Se puede decir entonces que ellos dos vieron la importancia de esta nueva herramienta matemática, más allá de lo desarrollado por Barrow, Wallis, Fermat, Descartes, van Heuraet, Sluse, Hudde, y otros tantos matemáticos contemporáneos suyos, a los cuales no se les puede desconocer de ninguna manera su aporte a la invención del análisis.

Para los escritos de Newton se tiene a disposición un amplio abanico de escritos desde su fuente primaria. Por ejemplo, se cuenta con su manuscrito “The October 1666 Tract on Fluxions” recuperado gracias al trabajo de *The Newton Project* (Iliffe, 2011). A partir de este tratado, se puede realizar una presentación alternativa de la parte dinámica del TFC (Muñoz Villate, 2021, 2022; Bressoud, 2011). Se cuenta también con las obras sobre Newton de historiadores de primer nivel como Marco Panza y Niccolò Guicciardini (Guicciardini, 2011; Panza, 2005).

En el caso de Leibniz, es más difícil recuperar toda su fuente primaria. Sin embargo, se cuenta con un argumento que hace parte de lo que se reconoce como TFC, y que fue publicado en el año 1693 en la revista “Acta Eruditorum” (Swetz, 2015). También es posible tener a disposición los trabajos restaurados en *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek*, en parte por Siegmund Probst y su equipo. Allí están los escritos de ciertos periodos, por ejemplo, entre los años 1674-1676 (Leibniz, 2008). Se cuenta así mismo con los escritos de expertos en los trabajos matemáticos de Leibniz como David Rabouin y Davide Crippa (Crippa, 2019; Chemla et al., 2016), y del grupo Mathesis, encargado de editar material matemático leibniziano (Mathesis Project, 2017). Desde este gran insumo en historia de las matemáticas, y de las matemáticas mismas, ha sido posible recuperar los argumentos y significados parciales que se mostrarán a continuación.

Metodología

Inicialmente se utiliza la metodología aportada desde la historiografía, es decir, aquella que permite abordar las matemáticas desde el punto de vista de lo que se hace, como una actividad humana que constituye una historia, más que ver las matemáticas como aquello que se estudia desde la unión de propiedades de objetos creados por esa actividad (Panza, 2005). Se accedió a los manuscritos de la fuente primaria de Newton y, en la medida de lo posible, de Leibniz. A partir del estudio de los tratados de Newton (1665-1671) y de Panza (2005) se *recupera* un argumento realizado por Hendrick van Heuraet, desconocido en la mayoría de textos universitarios de cálculo, que permite identificar que el problema inverso de las tangentes, el problema de las áreas, el problema de la rectificación de curvas, y el cálculo de las denominadas antiderivadas, son caras de la misma moneda (Panza, 2005). Así mismo, es posible hacer un análisis cronológico de distintas *versiones* del TFC en Newton a partir de 1665 hasta 1704 (Muñoz Villate, 2022).

Desde el punto de vista newtoniano, abordar el TFC como aquel que enuncia la derivada y la integral como opuestos, no tiene sentido, porque saldrían directamente de la definición que concebía él. Así que la forma de abordarlo, fue buscando un teorema que resultara análogo a lo reconocido como TFC. Este es el argumento que se presentará más adelante y que propicia así una entrada distinta, tanto a este teorema como a la integral definida: el teorema de Newton-van Heuraet (Panza, 2005).

En Leibniz este trabajo requiere más cuidado. No es posible en este momento realizar un estudio cronológico del TFC en sus estudios. Además, no hay como tal una sola proposición que pueda tomarse como este teorema dada la ausencia de su demostración. Lo que sí es posible, es presentar argumentos que hacen parte del sistema que integra el objeto matemático que se denomina TFC. Luego es posible abordarlo por lo menos desde tres perspectivas leibnizianas: como la relación inversa entre los operadores diferencial e integral, desde un argumento geométrico (que genera el significado parcial que se ilustrará adelante), y desde el trabajo de 1693 como el movimiento de tracción. Este trabajo fue presentado el 22 de junio del 2022 al grupo Mathesis en una conferencia híbrida (ver http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article2755&lang=en).

La metodología complementaria proviene del EOS por cuanto es un enfoque que proporciona herramientas para realizar un análisis microscópico de la actividad matemática, permitiendo identificar la configuración de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas requeridas en resolución de problemas, que son la razón de ser de un concepto. El análisis aplicado consideró la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas requeridos en la resolución de problemas. Este análisis busca tomar conciencia del concepto *complejidad*, lo que conduce a la reflexión del profesor sobre las posibles dificultades que pueden surgir en la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje, y de los nuevas soluciones que se podrían tener a disposición (Burgos et al., 2021).

Resultados: Nuevos significados parciales para la integral definida

La noción de *significado*, se vincula, de manera muy recurrente al de *comprensión*, y se utiliza también muy persistentemente en documentos curriculares, así como en la investigación y la práctica de la educación matemática (Godino, J. Burgos, M. Gea, 2021). Luego tener varios significados parciales de un objeto matemático permite, como lo propone el EOS, “un análisis detallado de la actividad matemática, al tener en cuenta la pluralidad de objetos implicados en dicha actividad, así como articular las dimensiones epistemológica, semiótica, cognitiva y sociocultural implicadas en la investigación en educación matemática” (Godino, J. Burgos, M. Gea, 2021, p. 4). Es así como tener varios significados parciales de la integral definida puede ayudar a mejorar la comprensión de este objeto matemático, viéndolo desde la complejidad que suscitan diferentes perspectivas del mismo.

En el artículo de *Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus* (Burgos et al., 2021) se proponen cuatro significados para la integral desde el punto de vista de los procesos de instrucción matemática en la universidad. Ellos son:

1. Cantidad de magnitud acotada entre dos sucesiones de convergentes cantidades. La magnitud puede ser geométrica, física, longitud, área, volumen, distancia, trabajo, densidad, etc.
2. Límite de sumas de Riemann, $\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$
3. Función acumulativa, $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
4. Incrementos diferenciales de la función acumulativa $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ si $G'(x) = f(x)$

Sin embargo, desde el estudio del TFC en los trabajos de Newton y de Leibniz, se puede afirmar que existen por lo menos dos maneras adicionales de abordar esta integral definida:

5. *Cuadratura* del área bajo una curva $f(x)$, i.e. relacionar el área bajo una curva con el área de un rectángulo: $\int_a^b f'(x)\,dx = K \cdot [f(b) - f(a)]$
6. Transformar *transmutar* una curva en otra que sea integrable *cuadrable*.

El EOS nos indica que estos son significados parciales *nuevos*, porque permitieron resolver problemas que eran irresolubles (además de célebres) hasta el S. XVII. Estos argumentos emergieron en la actividad matemática de Newton y de Leibniz al buscar resolver dichos problemas, y la forma en la cual fueron descritas por ellos es novedosa. También es cierto que estos argumentos no aparecen en los textos universitarios como Stewart (2015), Thomas (2009), Zill & Wright (2011), comúnmente usados en Latinoamérica, luego no hacen parte del insumo con el que cuenta algunos profesores al momento de organizar la enseñanza del TFC. El significado 5 y 6 parecen haber quedado olvidados en el tiempo, dejados de lado luego del crecimiento del análisis matemático, que decantó su evolución con el uso, por ejemplo, de los objetos matemáticos de límite y sumas de Riemann. Sólo un estudio historiográfico podría develarlos.

El significado parcial 5 puede abordarse desde el Teorema de Newton-van Heuraet (Muñoz, 2022; Panza, 2005) o desde la *demostración* del TFC de Leibniz de 1693 (Muñoz Villate, 2021; Mena, 2014; Lopez, 2011). Como se mencionó anteriormente, también se cuenta con los escritos recuperados de The Newton Project y Mathesis Project.

En efecto, Hendrick van Heuraet demostró que, si se cuenta con la cuadratura (el área) de una curva apropiadamente elegida, es posible rectificar una curva cualquiera. Newton modificó este teorema de tal forma que se pueda encontrar el área bajo una curva, teniendo la normal o la subtangente de otra curva apropiadamente elegida. Ver Figura 1.

A groso modo, van Heuraet usó la cuadratura de una curva END y el cálculo de la recta normal MG para hallar la longitud de la curva AML. Newton modificó estas condiciones tomando el segmento PG, y obtuvo directamente la cuadratura de la curva END. Así, este significado parcial 5 tiene por objetivo retomar la idea original de hallar la cuadratura de una curva como una aproximación del área de un cuadrado. Ambos, Newton y Leibniz obtuvieron este resultado para una gran cantidad de curvas (Muñoz Villate, 2021; Jullien, 2015; Scriba, 2014; Panza, 2005).

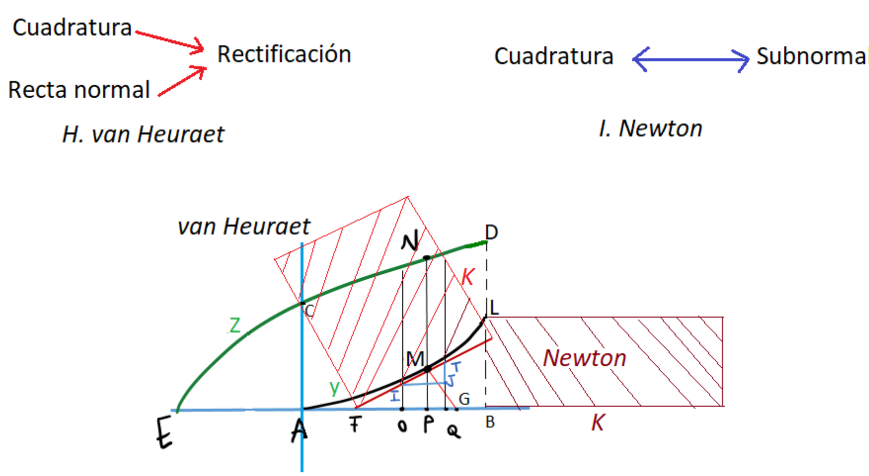

Figura 1. Figura propia para describir de forma paralela, el teorema de van Heuraet y la modificación de Newton

La demostración completa y la ilustración de algunos ejemplos, con uso de software matemático, para este argumento de Newton y van Heuraet, pueden verse en (Muñoz, 2022).

El significado parcial 6 en cambio se puede abordar a partir de la Proposición VI hecha por Leibniz en el libro *De Quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*, donde escribió 51 proposiciones. La proposición número VII es el reconocido *Teorema de Transmutación* (Muñoz Villate, 2021; Mena, 2014; Lopez, 2011).

Se presentará un ejemplo de la construcción de dicha transformación de curvas realizada por Leibniz, porque el *algoritmo* general de esta transmutación está detallada por David Rabouin en *Leibniz's Rigorous Foundations of the Method of Indivisibles* (Jullien, 2015). Cabe resaltar que dicha proposición es calificada por Rabouin como *espinosa.* Este calificativo es debido a que en esencia la Proposición VI busca relacionar el área de un polígono formado por una función escalonada, y el área bajo una curva dada. La construcción de este polígono es un poco engorrosa, por eso Leibniz replantea sus ideas y obtiene una mejora en la que será la Proposición VII.

Para realizar la construcción del polígono cuya área será muy cercana a la curva transmutada, se debe relacionar primero una curva inicial (la que se va a transformar o *transmutare*) con otra curva que sea *cuadrable* (integrable). Esta construcción que se explicará a continuación no es tampoco original de Leibniz: la idea de utilizar la transmutación en técnicas de cuadraturas fue enfatizada por Van Heuraet y construcciones muy similares a la de Leibniz se pueden encontrar en Roberval o Gregory (Jullien, 2015).

Ejemplo Proposición VI de Leibniz.

Se tomará la curva $f(x) = 2\sqrt{x}$ sobre el intervalo $[0,9]$. Esta curva es la que se *transmutará* en otra. Posteriormente, se construirá un polígono cuya área será tan cercana como se quiera al área bajo la curva transformada.

El primer paso es entonces trazar tangentes sobre algunos puntos de la curva elegida. En este caso, se trazan cuatro rectas tangentes, y se señalan los respectivos puntos de corte con el eje y. Se usa en este caso la notación original de Leibniz, esto es, ${}_1T, \dots ,{}_4T$. El segundo paso es trazar segmentos de recta paralelos a los ejes y y x a partir de los puntos elegidos para las tangentes y de los ${}_1T, \dots ,{}_4T$ respectivamente, véase la Figura 2.

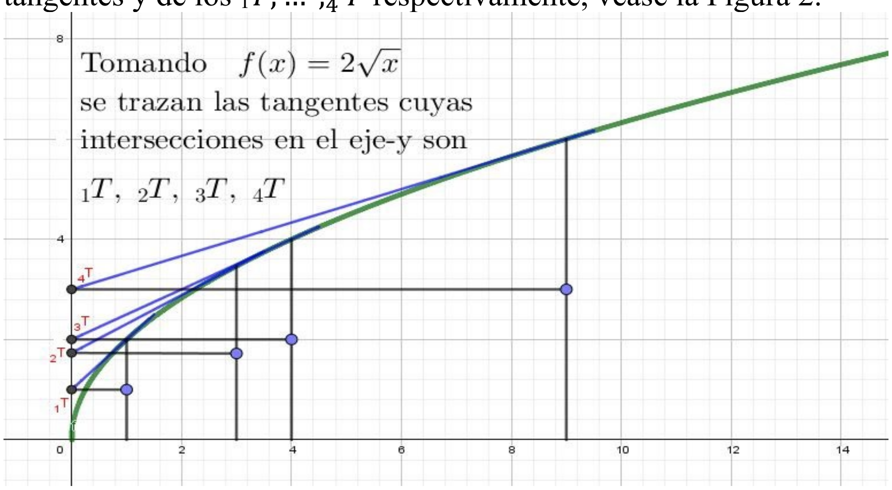

Figura 2. Figura propia basada en la Proposición VI de Leibniz De Quadratura

El tercer paso es construir la curva transmutada. Esta nueva curva se traza a partir de los puntos de intersección de los segmentos construidos en el paso anterior. Utilizando, por ejemplo, el software GeoGebra se obtiene la curva $g(x) = \sqrt{x}$, véase Figura 3.

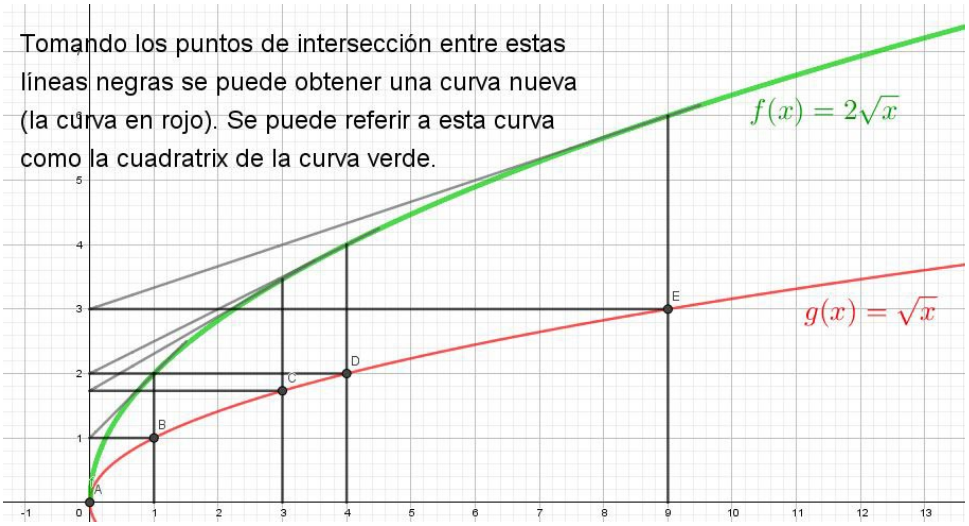

Figura 3. Construcción de la quadratrix (en rojo) a partir de la curva original (en verde)

El siguiente paso es construir un polígono equipolente a $g(x)$ en $[1,9]$ (desde 1 por ser el primer punto de tangencia elegido). Para obtenerlo, Leibniz utilizó los puntos F, G, H, I (los puntos de tangencia inicial) y tomó las rectas secantes entre ellos. Es decir, se trazan ahora las secantes entre F y G, G y H, y H e I, y se procede como en el Paso 1, es decir, se hallan los puntos de corte con el eje y y se construyen segmentos paralelos al eje x. En este caso, los puntos de intersección se notarán como P, O, T, S, véase la Figura 4.

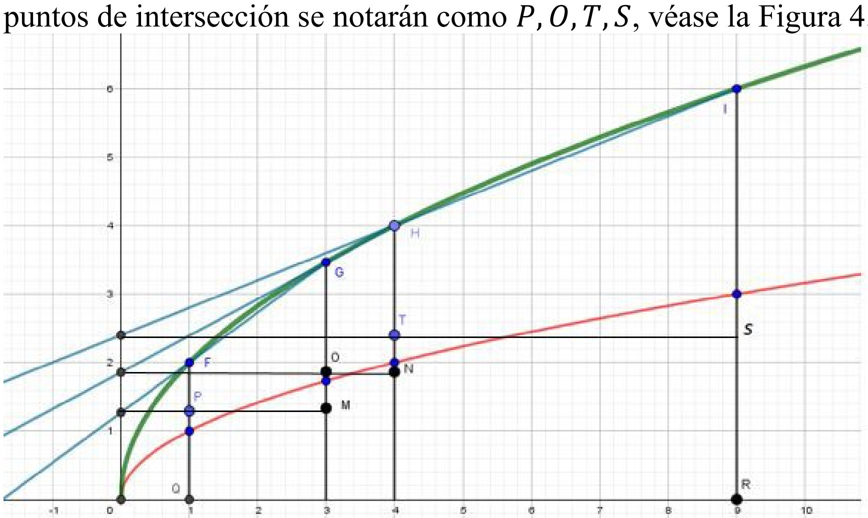

Figure 4. Construcción del polígono que será equipolente a la curva en rojo.

El quinto y último paso es calcular el área bajo la curva transmutada $g(x)$ y el polígono recién construido $PQRSTNOMP$. Utilizando nuevamente GeoGebra se comprueba que $\int_1^9 \sqrt{x}dx \ \approx 17.33$ mientras que el área del polígono será $Area((\text{PQRSTNOMP}) = 16.48$

Claramente, entre más puntos de tangencia se tomen, mejor será la aproximación del área de este polígono equipolente, véase Figura 5.

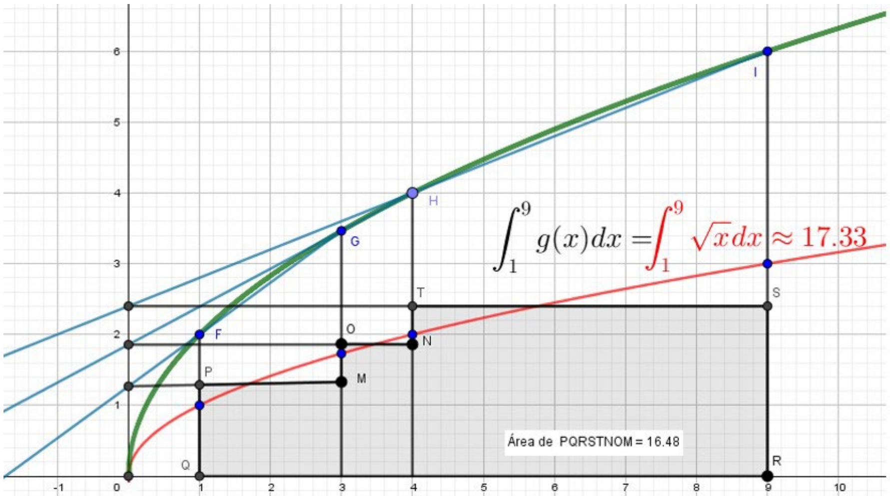

Figura 5. El área del polígono equipolente puede hacerse tan cercana al área bajo la curva en rojo como se quiera.

Conclusiones y reflexiones.

La investigación historiográfica y didáctica sobre los argumentos de Newton y de Leibniz en el estudio del TFC aporta dos significados parciales para la integral definida en el marco de estudios de significados y amplía la perspectiva de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje del TFC.

Gracias al *significado parcial 5* se evidencia que el cálculo de la longitud de arco de una curva (rectificación de una curva) fue históricamente anterior al de la integral definida, y no en la forma en que se presenta actualmente en los citados textos universitarios. También, que gracias a los trabajos de Hendrick van Heuraet, matemático olvidado en varios textos de análisis, Newton desarrolló un teorema que resulta análogo al reconocido TFC.

Del *significado parcial 6* se puede concluir que, aunque pareciera que este significado parcial fuera similar al significado número dos (aproximar el área bajo una curva como suma de área de polígonos), se puede asegurar que Leibniz relaciona dos curvas y obtiene luego un polígono equipolente a una de ellas, mientras que Riemann aproxima el área bajo una curva con un polígono construido a partir de esa misma curva. Lo que sí es evidente es que el proceso riemanniano es más sencillo en su construcción geométrica que el presentado en esta Proposición VI de Leibniz de *De Quadratura*, ver Figura 6. No obstante, para ciertos ejemplos, esta aproximación de Leibniz es mejor que la realizada por sumas superiores e inferiores (o por derecha o izquierda, según sea el caso).

Como una reflexión final, uno de los requisitos de los profesores es el de tener más recursos para enseñar objetos matemáticos y favorecer su comprensión. La historia de la matemática, y el estudio de sus fuentes primarias, siguen siendo hoy en día una fuente inmensa de recursos que podrían aportar, como en este escrito, más significados parciales de un objeto matemático, ofreciendo así nuevas perspectivas, nuevas entradas. Estos estudios se pueden favorecer con el uso de un software matemático, que participa en este proceso como un mediador para mejorar la visualización y adaptación de argumentos, que como en este trabajo, eran inicialmente de corte geométrico.

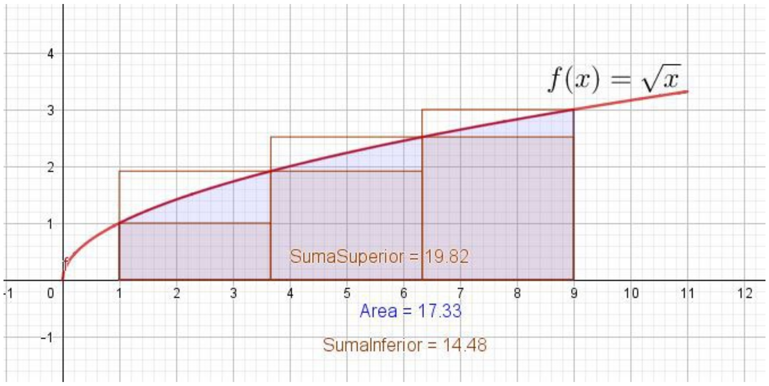

Figura 6. Aproximación del área por la suma superior e inferior en GeoGebra

Referencias y bibliografía

Aranda, C., & Callejo, M. (2015). Un experimento de enseñanza para la construcción del concepto de integral definida usando un programa de geometría dinámica. *Departamento de Innovación y Formación Didáctica Universidad de Alicante*, *1*, 1–13. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Bajrachrya, R. R. (2014). *Student Application of the Fundamental Theorem of Calculus with Graphical Representations in Mathematics and Physics*. *August*.

Biehler, R., Hochmuth, R., Göller, R., & Rück, H. (2017). Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline. *Khdm Conference 2015*, *February*. https://kobra.uni-kassel.de/bitstream/123456789/2016041950121/5/khdm_report_17_05.pdf

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, *118*(2), 99–115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D., & Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(1), 4. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Castro, I. (1997). *Pasado, presente y futuro del cálculo en Colombia*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Chemla, K., Chorlay, R., & Rabouin, D. (2016). The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences. In *1*. Oxford University Press.

Coelho, C. (1998). *Students' understanding of the fundamental theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and visual imagery*. https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10020309/

Cordero, F. (2003). Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación. *Grupo Editorial Iberoamericana*, *January 2003*. https://www.researchgate.net/publication/270959982_Reconstruccion_de_significados_del_Calculo_Integral_La_nocion_de_acumulacion_como_una_argumentacion

Crippa, D. (2019). *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: A debate among Gregory, Huygens and Leibniz* (Vol. 1673). Birkhäuser.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In *Mathematics and cognicion* (pp. 113–134). Cambridge University Press.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery: Masterpieces. From Newton to Lebesgue.* Princeton University Press.

Fuente, Á. C. de la, Cañada, L. O., & Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*.

Fullerton, C. S. U. (2003). *Bibliography for the Fundamental Theorem of Calculus*. http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/c2003/FunTheoremCalculusBib/Links/FunTheoremCalculusBib_lnk_2.html

Godino, J. Burgos, M. Gea, M. (2021). Análisis de teorías del significado en educación matemática. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *2019*, 1–31.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Guicciardini, N. (2011). *Newton*. Carocci Editore.

ICMI. (2002). *History in mathematics education (International Commission on Mathematical Instruction)* (J. Fauvel & A. Van Maanen (eds.)). Kluwer Academic Publishers.

Iliffe, R. (2011). *The October of 1666 Tract on Fluxions*. The Newton Project. http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00100

Jullien, V. (2015). *Seventeenth- Century Indivisibles Revisited*. Birkhäuser.

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 691–695. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0608-9

Klisinska, A. (2005). The Fundamental Theorem of Calculus_ A case study into the didactic transposition of proof. In *Integration The Vlsi Journal*. https://doi.org/10.2307/2307007

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the Fundamental Theorem of Calculus. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Methodology and Methods in Mathematics Education*, *3*, 201–208.

Larson, R., & Edwards, B. (2014). Calculo. In *Igarss 2014*. https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Leibniz, G. W. (2008). *Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe, Reihe VII, Band 5. Mathematische Schriften, 1674–1676 Infinitesimalrechnung PDFA*. https://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/VII5A.pdf

Lopez, J. (2011). Reflexions On Leibniz' Proof Of The Fundamental Theorem Of Calculus. *Research Gate*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405

Mathesis Project. (2017). *Mathesis. Editing Leibniz's Mathematical Manuscripts*. http://mathesis.altervista.org/

Mena, R. (2014). *The Fundamental Theorem of Calculus*. http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf

Muñoz-Villate, W. (2021). Relations between history of mathematics and training of engineers. *Revista Vision Electrónica*, *15*(1). https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471

Muñoz Villate, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación*, *5*(1), 189–204. https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i1.pp189-204

Muñoz Villate, W. (2022). Elementos para un argumento didáctico desde el estudio histórico del Teorema Fundamental del Cálculo en Newton. *Ciencia e Interculturalidad*, *30*(1), 26–39. https://www.camjol.info/index.php/RCI/article/view/14241/16787

Muñoz, W. (2022). Memorias 25 encuentro de geometría y sus aplicaciones. In P. Perry (Ed.), *Argumentos de Newton y Leibniz relativos al Teorema Fundamental del Cálculo mediados por software* (pp. 81–92). Universidad Pedagógica Nacional. http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/memorias.html

Panza, M. (2005). *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Ponce, J. (2014). *El Teorema Fundamental del Cálculo : estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación* (Issue August).

Robles, M., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*.

Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *33*(2), 29. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rosyidi, A. H., & Kohar, A. W. (2018). Is f(x) unique? Prospective teachers' conceptual and procedural knowledge on a definite integral problem. *Journal of Physics: Conference Series*, *1108*(1), 0–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1108/1/012095

Scriba, C. (2014). Method The Inverse of Tangents : A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). In *Archive for History of Exact Sciences* (Vol. 2, Issue 2, pp. 113–137).

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

Swetz, F. (2015). *Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus*. Mathematical Association of America. https://www.maa.org/book/export/html/641727

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, *August 1992*, 13–28. https://doi.org/DESC787 [pii]\r10.1111/j.1467-7687.2008.00787.x

Thomas, G. J. (2006). *Calculo de una variable* (11th ed.). Pearson.

Thompson, P. (1994). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 131. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4236/ojo.2014.48035

Thompson, P., & Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials. *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*, *August*, 355–359. http://pat-thompson.net/PDFversions/2016Thompson-Dreyfus.pdf

Toumasis, C. (1993). What is the fundamental theorem of integral calculus? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *24*(5), 685–687. https://doi.org/10.1080/0020739930240509

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2010). Matemáticas. Cálculo diferencial. In *McGraw Hill*.