

**XVI CIAEM** 

Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education

 UNIVERSIDAD DE LIMA Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023

  
xvi.ciaem-iacme.org

## **QOKA® Tawa Pukllay - Aritmética inka para invidentes**

Dhavit Prem (Carlos **Saldívar** Olazo)

Ingeniería de Sistemas - Universidad de Lima;

Maestría Filosofía Epistemología – UNMSM;

Asociación Yupanki

Perú

[dhavitprem@gmail.com](mailto:dhavitprem@gmail.com)

Divapati Prem (Alvaro **Saldívar** Olazo)

Administración de Negocios – Universidad de Lima;

Asociación Yupanki

Perú

[yachay@yupanainka.com](mailto:yachay@yupanainka.com)

### **Resumen**

QOKA Tawa Pukllay (QTP) es un método aritmético desarrollado para el proceso de enseñanza y aprendizaje de personas invidentes. QTP está basado en el método aritmético Yupana Inka Tawa Pukllay (YITP) y no requiere utilizar los tradicionales algoritmos indoarábicos, sino que resuelve las operaciones aritméticas de manera lúdica y con algoritmos propios basados en el reconocimiento de patrones y ejecución de movimientos predefinidos que permiten desarrollar estrategias propias. Usa tableros ergonómicos, fichas de textura especial y algoritmos propios, que permiten un efectivo aprendizaje del sistema numérico inka y su equivalencia indoarábica. QTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en sujetos con discapacidad visual o sujetos videntes con vendas en los ojos para simular condiciones similares. QTP reduce la memoria de trabajo, facilita la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias. Los practicantes manifiestan que QTP les facilita la comprensión y solución de operaciones más que el ábaco tradicionalmente utilizado.

### **Introducción**

Tawa Pukllay (Dhavit-Prem, 2016) es un método aritmético desarrollado y publicado por la Asociación Yupanki entre los años 2014 y 2016 como una propuesta para decodificar el uso de la yupana o calculadora inka (Momath and Wolfram, 2020) hallada en el manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” (Guaman-Poma F., 1616) (figura 1).

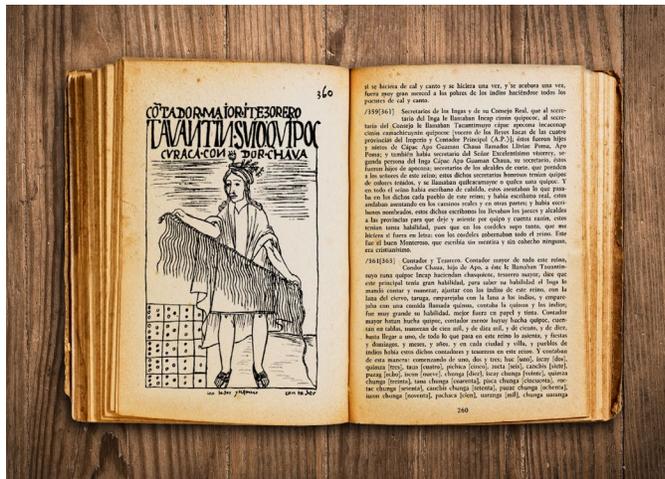


Figura 1. (Recreación) Manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” de Felipe Guaman Poma de Ayala, 1616

YITP se ha presentado en diversas conferencias y exposiciones en Ferias de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC Perú 2015 y 2017), USA Science & Engineering Festival (Washington DC 2016); Congresos Internacionales como RELME 31 (Universidad de Lima, Perú 2017), EFPEM 2017 (Universidad San Carlos de Guatemala), RELME 32 (Universidad de Medellín, Colombia 2018), VI Congreso Internacional de Etnomatemáticas: Saberes, Diversidad y Paz, ICEm-6 (Universidad de Antioquia, Colombia 2018), Congreso Internacional de innovación educativa (Tecnológico de Monterrey, México, 2019).

### Validación matemática y formalización de YITP

El artículo *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Dhavit-Prem et al, 2022) presentó la formalización del método, su axiomatización, formación de teoremas y demostración de consistencia mediante el álgebra. Fue aceptado a ser expuesto en el *International Conference on Frontiers of Mathematics and Artificial Intelligence (CFMAI 2022)* en Beijing, China.

### Hallazgos en el aprendizaje aritmético mediante YITP

El artículo *Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School*, publicado en la revista *Educational Technology & Society* muestra resultados que sugieren un gran potencial del YITP como herramienta educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética, luego de haber experimentado con un sistema de autoaprendizaje del YITP codificado en un aplicativo (juego serio) para tabletas electrónicas con niños de zonas rurales en situación de aislamiento debido a la pandemia de la Covid19.(Guzmán-Jiménez, 2023). En dicho estudio del tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, se observa la rapidez con la que los estudiantes aprenden tópicos de YITP, así como una mejora en la actitud respecto a las matemáticas. YITP también presenta un impacto favorable en el desarrollo del pensamiento computacional en niños debido al reconocimiento de patrones y elaboración de estrategias (algoritmos) durante el aprendizaje de la aritmética (Alvarado L. et al, 2022).

## QOKA Tawa Pukllay

Una de las líneas de investigación con mayor impacto derivadas del método TP es el QOKA TP (QTP) o YITP para invidentes. (Dhavit-Prem, 2018) El nombre “QOKA” corresponde a la estructura de puntos de una fila en la yupana, la cual coincide con las letras Braille **Q**, **O**, **K** y **A**. (figura 2)

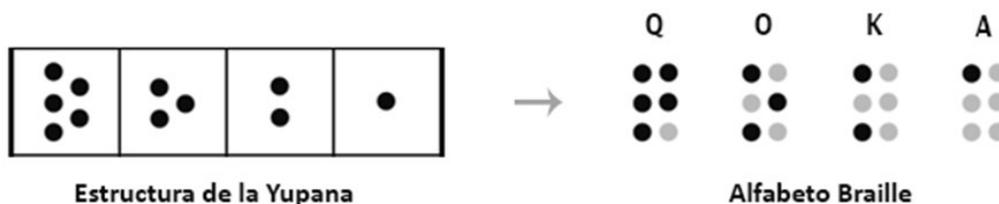


Figura 2. Estructura original de una fila de la yupana inca y su coincidencia con el sistema Braille

Esta yupana comprende la misma estructura básica que la desarrollada a partir del dibujo de Guaman Poma, es decir que contiene 5 filas y 4 columnas, sin embargo, cada casilla se encuentra en bajo relieve y de manera cóncava, lo cual permite que las fichas que estén presentes en ella sean siempre conducidas al centro de la misma (figura3).

Subitización es la identificación inmediata de un número exacto de objetos en pequeños conjuntos (Piazza M. et al, 2011). Al tener una estructura repetitiva de filas con 5,3,2 y 1 puntos, YITP facilita la subitización de dichos puntos. En personas con discapacidad visual, esta estructura matricial y la dinámica de uso de ambas manos parece estimular la memoria de trabajo espacial y mejorar la recordación táctil de los valores de las casillas (Leo F., 2018) y por lo tanto prescindir del uso de Braille en las casillas del tablero QTP (figura 4).

La yupana QTP puede ser de distintas clases: madera, cartón reciclado, impresión 3D, MDF u otros, tomando las siguientes consideraciones (Dhavit-Prem, 2018):

- El material no debe tener una superficie muy lisa (p.e. plástico o policarbonato), puesto que en estos materiales se suele producir deslizamientos involuntarios de las semillas o elementos de juego. Se sugiere por esto un material de superficie ligeramente rugosa.
- Las casillas en bajo relieve deben tener dimensiones que permitan la operatividad de al menos seis dedos con facilidad (tres de la mano derecha y tres de la izquierda).
- Los espacios entre los casilleros no deben ser ni muy separados que incomoden el tránsito de los dedos de unos a otros, ni muy juntos, para que se haga obvia la distinción. Las casillas adyacentes deben ser equidistantes tanto respecto a las filas como a las columnas a las que pertenecen.
- Tablero antideslizante o garantizar un mínimo de movimiento en su mesa de apoyo para evitar deslizamientos involuntarios: la posición es clave para la rápida orientación del practicante.

- Se deben contar con tres tipos de fichas diferenciables por su forma (esferas, cubos, tetraedros, fichas planas, etc.) y textura (firme, esponjoso, liso, áspero, etc.), pues estos son los atributos que reemplazan la función de las fichas de color en el sistema YITP.



Figura 3. Tablero QOKA TP y semillas de tarwi



Figura 4. YITP con ojos vendados

### Aritmética de patrones: algoritmos YITP

QTP se basa en el mismo principio de representación de números, utiliza los mismos movimientos (básicos, de expansión y compuestos) y emplea los mismos algoritmos YITP para la resolución de operaciones aritméticas. La explicación detallada se encuentra en el libro *Yupana Inka – Decodificando la matemática Inka. Método Tawa Pukllay*. (Dhavit-Prem 2016, 2018).

### Conclusiones

QTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en sujetos con discapacidad visual o sujetos videntes con vendas en los ojos para simular condiciones similares. Estos estudios sugieren que QTP reduce la memoria de trabajo, facilitando la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias. Los practicantes manifiestan que QTP les facilita la comprensión y solución de operaciones más que el ábaco: el ábaco *cranmer* o *soroban* es actualmente el más popularizado en los diversos campos de la educación especial (Amato S. 2013; Hong, 2006).

### Referencias y bibliografía

- Amato S. et al (2013) The Abacus: Instruction by Teachers of Students with Visual Impairments. 272 Journal of Visual Impairment & Blindness, July-August 2013
- L. Alvarado et al (2022), "Teaching of the Yupana with the Tawa Pukllay method for developing the Computational Thinking in children," 2022 IEEE World Engineering Education Conference (EDUNINE), 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/EDUNINE53672.2022.9782386.
- Guaman Poma, F. (1616). Nueva Corónica y Buen Gobierno

- Guzman-Jimenez, R., Dhavit-Prem, Saldívar, A., & Escotto-Córdova, A. (2023). Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School. *Educational Technology & Society*, 26 (1),79-94.79ISSN 1436-4522 (online) and 1176-3647 (print).
- Hong, Shen (2006) Teaching Mental Abacus Calculation to Students with Mental Retardation. *Journal of the International Association of Special Education*, v7 n1 p56-66 Spr 2006
- Leo, F. (2018) Improving spatial working memory in blind and sighted youngsters using programmable tactile displays. <https://doi.org/10.1177/2050312118820028>
- MoMath and Wolfram (2020). History of Mathematics Project - Incan Yupana. Rescatado de <https://www.history-of-mathematics.org/artifacts/incan-yupana>
- Piazza, M., et al. Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition* (2011), doi:10.1016/j.cognition.2011.05.007
- Prem, Dhavit (2014-2016). Yupana Inka – Decodificando la matemática inka, Método Tawa Pukllay. Asociación Yupanki (Ed.)
- Prem, Dhavit (2018). Hatun Yupana Qellqa. Antología de estudios. Tawa Pukllay esencial y extensiones. Asociación Yupanki (Ed.)
- Prem, Dhavit et al (2019). Tawa Pukllay Aipanakuy: The 4 Sacred Games of the Inkas in a ludic arithmetic competition. Editora Artemis. DOI 10.37572/EdArt\_2806213851