Prácticas Asociadas a la Solución del Problema de la Tangencia. Herramienta para la Formación de Profesores de Matemáticas

Jhon Helver **Bello** Chavez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhbelloc@udistrital.edu.co
Alberto **Forero** Poveda
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
aforerop@udistrital.edu.co

Resumen

Este taller pretende desarrollar un análisis del cambio de práctica vinculada a diferentes soluciones de un problema histórico, la tangente a una curva en un punto. Las soluciones a los problemas, los objetos matemáticos y los conceptos asociados a la solución, se enfocan en una forma de hacer matemáticas, la cual impone maneras de percibir el rigor, la validez y la validación. En este sentido, el análisis de la práctica por parte de quien enseña matemáticas permite vislumbrar diferentes escenarios cognitivos detrás del abordaje de una situación, el cual incluye tratamientos de las representaciones, los diagramas, el símbolo, el lenguaje matemático, entre otros. Se propone que, como parte de la formación de los profesores de matemáticas, estos diferentes estados del conocimiento sean reflexionados, a partir de las herramientas conceptuales que definen la práctica matemática que se aborde.

Palabras clave: Historia de la Matemática; Tangencia; Práctica Matemática; Formación de Profesores; Resolución de problemas.

Algunas ideas sobre la importancia del análisis de la práctica matemática en educación matemática

Entendemos las matemáticas como una producción que realizan los humanos en comunidades y culturas determinadas, compartiendo problemas y creencias de un momento histórico y sobre la base de capacidades biológicas y cognitivas (Löwe, 2016; Ferreiros, 2016). En este sentido, creemos que las matemáticas son consensos de la comunidad científica sobre un producto construido en un sistema de producción de conocimiento, ese procedimiento es la cuestión de indagación de la práctica, la cual reconocemos con las dificultades propias de una práctica social, la cual se establece y se modifica a través del tiempo y la cultura (Ferreiros, 2016). El ejercicio social del conocimiento no puede analizarse sólo en sus condiciones objetivas; se necesita considerar a los agentes de las prácticas en su proceso y en su sistema de producción. Se requiere "rescatar la producción no en cuanto individuo sino como agente socializado, es decir, de aprehenderlo a través de aquellos elementos objetivos que son producto de lo social" (Gutiérrez, 2005, p. 16).

Siendo así, a partir de los problemas y su tratamiento podemos indagar las condiciones de la práctica que permiten consolidar una solución parcial o total de un problema dado. En la práctica este tipo de análisis permiten identificar las ideas que acondicionan y posibilitan una solución. La forma como se soluciona una situación es una muestra del estado de conocimiento en una época, por lo tanto, en el estudio de varias soluciones del mismo problema nos interesa analizar el cambio en: los ideales, las justificaciones, las herramientas, los procesos y los procedimientos con que se aborda el problema.

En consecuencia, pero en el sentido de la formación del profesor, este taller indaga el hecho que, dado un problema cuya solución remite a la tangente en un punto los participantes se aproximan más a las maneras como el problema se solucionó en una de las prácticas estudiadas. Es posible que algunos criterios o herramientas hayan sido sustituidos por aplicaciones o programas fundamentados en artefactos tecnológicos, sin embargo, los modelos de razonamiento y argumentación, las hipótesis y el lenguaje que se exponen para producir una solución se ubican en una práctica específica. El producto de nuestro saber y conocimiento se construye en el aprendizaje de una práctica matemática, lo que nos lleva a solucionar una situación que es problémica, en el campo en que se desarrolla una de las prácticas conocidas.

A continuación, teniendo en cuenta la perspectiva que orientará este taller, expondremos consideraciones generales frente a tres prácticas matemáticas vinculadas al abordaje, tratamiento y resolución del problema de tangencia a una curva. La primera, vinculada a las consideraciones en la Grecia antigua, la segunda, vinculada al tratamiento cartesiano y la tercera, desde la fundamentación del Cálculo, en la perspectiva de Fermat, Newton y Leibniz.

Práctica en la Grecia Antigua

En el texto Metafísica, Aristóteles distingue a las Matemáticas como un género de ciencia que estudia los aspectos cuantitativos del ser, sin atender a su movimiento físico, aspecto fundamental en la comprensión inicial de la práctica matemática en discursos como los de Euclides y Apolonio, en el sentido de que, según Sánchez (2017), los matemáticos focalizan la atención en los cuerpos físicos, pero no en cuanto que están en movimiento, sino en cuanto que son cuerpos o sólidos (p. 50). Existen diversos agentes vinculados a la práctica matemática en la Grecia antigua, fundamentales en la comprensión epistémica de las Matemáticas, que nos permite, por ejemplo, explorar perspectivas asociadas al problema de la tangencia en la antigüedad.

En este sentido, una de las caracterizaciones del problema de tangencia en la Grecia antigua se encuentra asociada a la práctica matemática emergente de los discursos y perspectivas presentes en los trabajos de Euclides y Apolonio, quienes coincidían, entre otros, en formas de actuación y comprensión frente a diversos problemas geométricos, aspecto que pretendemos fundamentar en el presente texto. Frente a los agentes principales en la práctica matemática que se enfrenta al problema de la tangencia en Euclides y Apolonio, podemos indicar que su génesis se concentra en la primigenia de la noción de curva, desde su caracterización hasta sus propiedades y relaciones emergentes, principalmente desde el estudio y análisis de las secciones cónicas. En este contexto, la idea de tangencia se manifiesta cuando una recta "toca a la circunferencia y siendo prolongada no corta a la circunferencia" (Euclides, Libro III), perspectiva que continúa Apolonio para la caracterización de una recta tangente a una sección cónica.

Esta perspectiva estática de la tangencia, se manifiesta en diferentes idealizaciones, por un lado, desde la caracterización de las propiedades que se definen al trazar una recta tangente a una curva, por ejemplo, cuando Euclides se refiere a la visión de tocar, pero no cortar, en su proposición 16 del libro III, "La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia…"(p.125). Perspectiva que fundamenta las consideraciones frente a la curva, el espacio y la tangencia en su práctica. Igualmente, Apolonio manifiesta un objetivo fundamental en la práctica vinculada a la tangencia, cuando se dispone a construir y definir diferentes relaciones geométricas emergentes de la elaboración de rectas tangentes a secciones cónicas, como lo son las relaciones entre la recta tangente, las ordenadas y los diámetros en parábolas (Fig. 1A) (Proposición 33, I, Conics), cuando establece las condiciones en las que una recta será tangente a una parábola, a partir de relaciones proporcionales sobre una extensión del diámetro y una ordenada, o entre los puntos de aplicación, los diámetros y las rectas tangentes en secciones cónicas (Fig. 1B) (Proposición 45, III, Conics), cuando se define que una de las consecuencias del trazado de una tangente a una sección cónica es la determinación de una dependencia entre la posición de los puntos de aplicación (focos) y los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es un segmento tangente.

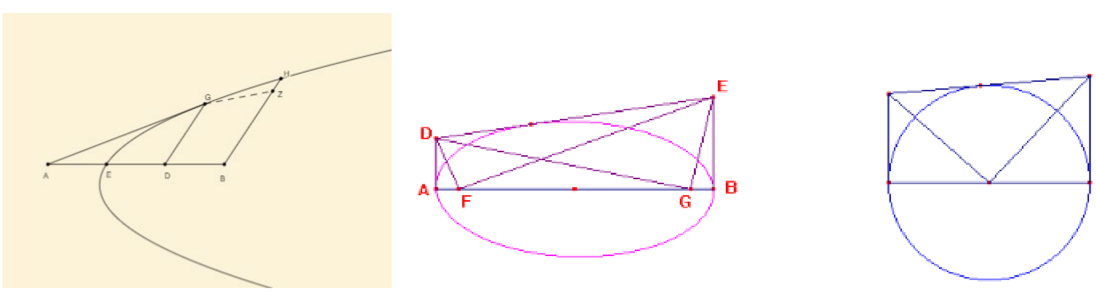

Figura 1. A. (33,I) Conics. B. (45, III) Conics

En este sentido, se puede distinguir, de manera general, una fuerte correlación entre los métodos estáticos expuestos para la determinación de relaciones y comprensiones asociadas con la tangencia a secciones cónicas, y el razonamiento visual que permite interpretar y argumentar la validez de las mismas, en la perspectiva de la abstracción del espacio y de las secciones cónicas en la definición de tangencia y en la fundamentación de la geometría en las actividades vinculadas a la práctica matemática griega en este contexto.

Solución en la práctica cartesiana

En complemento con la práctica de la antigüedad, alrededor de finales del siglo XVI e inicios de siglo XVII, el trabajo de diferentes autores, como Viete, Fermat, Clavius y en especial Descartes, permitieron la formulación de nuevas ideas sobre el rigor geométrico, el método analítico de resolución de problemas, las curvas como objetos de la geometría y la validez de la construcción geométrica realizada con instrumentos articulados, diferentes a la regla y el compás; estos fueron asuntos que permitieron ir originando el cambio en la práctica. Quizás la mayor innovación de la época fue el tratamiento de problemas por medio del método analítico, el suponer el problema resuelto para construir la ecuación que contiene la respuesta se convirtió en una forma usual de resolución de problemas. En el caso específico del problema de la tangente a una curva en un punto, el tratamiento cartesiano, incluyó el uso del método y la construcción de ecuaciones.

Se toma una línea curva CE y por C se traza la recta normal, como se muestra en la figura 2. Al tomar la recta AG de modo que los puntos de la curva se describan a partir de la recta $CM = x$ y $AM = y$, de tal manera, que sea posible construir una ecuación expresada en términos de x y y.

Dos innovaciones aparecen asociadas a esta práctica: suponer el problema resuelto, de tal manera, que lo buscado se exprese a partir de tratar de la misma manera las cantidades conocidas y desconocidas; y un diagrama que en las formas e instrumentos de esta práctica es una construcción geométrica; un modelo de la situación que ejemplifica las razones que permiten garantizar el trazo de la normal y la construcción de las ecuaciones que representan el problema.

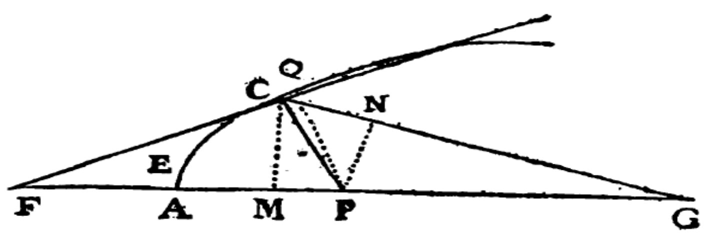

Figura 2. Problema de la tangencia en Descartes.

En esta solución ya se vislumbran consideraciones sobre la siguiente práctica, en donde se aprecia la idea de cantidades infinitamente pequeñas; pues, la idea de tangencia está ligada al encuentro de los dos puntos de corte de la recta con la curva, de tal forma, que se convierte en un punto, la tangente a un punto de la curva. Implícitamente, la técnica que se usa supone la existencia de la recta tangente a partir de la aproximación de un punto a otro. Aquí la curva se encuentra dada, se aplica el supuesto del método analítico, suponiendo que la recta tangente en un punto de la curva existe y a partir de ecuaciones se relaciona en un punto la recta y la curva.

Solución en la práctica desde el Cálculo: Fermat-Newton-Leibniz

Frente al tratamiento del problema de tangencia a curvas en la época de la Modernidad se encuentran diversos autores que lograron trabajar relaciones y actividades vinculadas a este, entre los que se tienen los trabajos y discursos asociados a Fermat, Newton y Leibniz. Las prácticas matemáticas que fundamentan el proceso de resolución de problemas en los trabajos de estos autores permiten comprender, entre otras, tres perspectivas fundamentales asociadas al problema de la tangencia, que se concentran en la actividad de simbolización, la fundamentación del análisis infinitesimal y la caracterización del movimiento continuo.

Frente a la actividad de simbolización, para Fermat fue fundamental el proceso que le permitió aplicar su método de tangentes, derivado del método de máximos y mínimos, para tramitar la heurística fundamentada en las "adigualdades", en donde, a modo de ejemplo, llega a conclusiones definidas previamente por Apolonio, pero fundamentadas desde la relación entre la actividad de simbolización y el uso de cantidades infinitesimales, que le permiten determinar que una expresión que requiere analizar para estudiar las relaciones vinculadas a la determinación de la recta tangente a la parábola viene definida por:

$$\frac{m^2x^2}{d} \approx m^2\frac{(x-y)^2}{d-y}$$

expresión que le permite a Fermat desarrollar su actividad vinculada a la determinación de tangentes y exponer simbólicamente las relaciones que definen a la parábola como una curva con condiciones geométricas específicas y así, elaborar un proceso que le permita trabajar con cantidades infinitesimales.

En este sentido, esta caracterización de las cantidades infinitesimales es otra perspectiva fundamental, que se manifiesta en el proceso de determinación de tangentes a curvas, inicialmente en los trabajos de Fermat, cuando interviene el estudio de las pendientes y el uso de un incremento E, a partir del método analítico asociado a la resolución del problema de caracterizar simbólicamente las relaciones vinculadas a la determinación de la tangente, por ejemplo, en el caso de las secciones cónicas (Figura 2a). Igualmente, Leibniz construye heurísticas vinculadas a la caracterización de la utilidad de las cantidades infinitesimales en el establecimiento de relaciones sobre la determinación de la tangente a curvas, así como de su vínculo con los problemas de cuadratura, para esto, inicialmente aborda la intervención de los infinitésimos en problemas asociados a series que representan sumas de diferencias, que le contribuye en el establecimiento de una simbología para un tratamiento de cantidades infinitesimales y así, lograr construir una estructura propia frente al método del análisis infinitesimal, por medio de uno de sus principales aportes, el establecimiento de relaciones y propiedades asociadas al problema de la tangencia por medio del triángulo característico, como se evidencia en las relaciones proporcionales asociadas al triángulo indeterminable, como un elemento fundamental en su proceso de argumentación (Figura 3b).

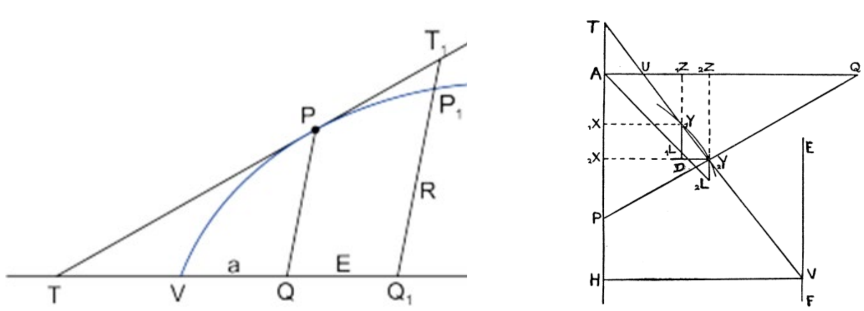

Figura 3. Perspectivas infinitesimales asociadas al problema de la tangencia en Fermat y Leibniz

En el caso de Newton, principal precursor de la perspectiva vinculada al movimiento y la filosofía natural, dos asuntos importantes en el desarrollo de las primeras ideas en la solución del problema de la tangente están vinculadas con los siguientes aspectos: la búsqueda de un método único para la solución del problema, basado en cantidades infinitamente pequeñas, que dieron inicio a la idea de fluxión, y, la generación de un método para las curvas mecánicas, basado en ideas cinemáticas. En ambos casos, el abordaje del problema se realiza a partir de la idea de movimiento y el uso del método analítico de resolución de problemas.

Dos procedimientos para la solución de este problema se establecen en los diagramas de la figura 4:

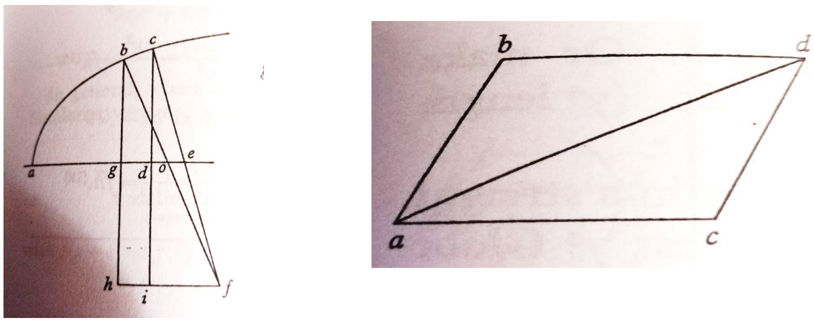

Figura 4. Diagrama para curvas algebraicas y para curvas mecánicas

la aproximación de la recta secante a la recta tangente propuesto para curvas algebraicas (figura, 4a) y la idea vectorial de construcción de la tangente a partir de la descomposición del movimiento en dos especies de vectores que permiten construir la razón que genera la tangente en un punto, para curvas mecánicas (figura, 4b). En ambos casos, la idea de movimiento es fundamental para la comprensión de la práctica matemática que se encuentra antes de la formalización.

Conclusiones

En términos del análisis sobre los discursos vinculados al abordaje, tratamiento y resolución del problema de la tangencia en diferentes prácticas, podemos comprender que la heurística vinculada al proceso en cada discurso, está directamente relacionada con los ideales, las justificaciones y las herramientas que fundamentan la práctica en cada etapa o momento histórico, así, es posible centrar la atención en las relaciones geométricas o en el método analítico que conecta las relaciones geométricas y la simbología o en la perspectiva infinitesimal de las relaciones geométricas o en la estructuración de métodos generales para el tratamiento de situaciones asociadas a la tangencia, pues en todos los casos es posible encontrar actividades matemáticas que contribuyen en el proceso para potenciar el desarrollo de pensamiento matemático de un estudiante, pues éstas perspectivas se fundamentan en todos los elementos que se pueden intervenir a la hora de solucionar un problema en Matemáticas.

De esta forma, analizar la práctica matemática, como un instrumento que permite construir un estado de conocimiento, implica considerar aspectos como los signos, símbolos, diagramas y esquemas que están directamente relacionados con el discurso de una época. En ese sentido, el profesor puede recrear elementos de una práctica en el aula, e ir diseñando con el fin de transformar y fortalecer significados asociados a la idea de tangencia.

La perspectiva del análisis de curvas desde los instrumentos mecánicos es una posibilidad que permite establecer conexiones entre práctica analítica, estática e infinitesimal en la caracterización del problema de la tangencia. Aspecto que se desarrolla en el taller. La diversidad de perspectivas de solución a un mismo problema son ejemplo de diferentes prácticas y posturas sobre las matemáticas, las cuales pueden ser aprovechadas por el profesor para determinar diferentes estados y transformaciones de las matemáticas que practican los aprendices.

Referencias y bibliografía

Apolonio, D. (1952). Conics. En *Britannica Great Books 11* (C. Taliaferro, Trad., págs. 597-804). London: Encyclopedia Britannica, INC.

Descartes, R. (1954). *The Geometry.* (D. Smith, & M. Latham, Trads.) New York: Dover Publication.

Euclides. (2007). *Elementos I.* (M. Puertas Castaños, Trad.) Barcelona: Gredos.

Ferreiros, J. (2016). *Mathematical Knowlegde and the Interplay of Practice.* Princeton: Princeton University Press.

Gutierrez, A. (2005). *Las prácticas sociales: una introducción a Pierre Bourdieu* . Buenos Aires : Ferreira Editor.

Löwe, B. (2016). Philosophy or not? The study of Cultures and Practices of Mathematics. En S. Ju, B. Löwe, T. Müller, & Y. Xie (Edits.), *Cultures of Mathematics and Logic. Selected Papers from the Conference in Guangzhou, China, November 9-12, 2012* (págs. 23-42). Switzerland: birkhauser.