EOS, la fotografía, Tracker y GeoGebra en la rectificación de curvas

Rafael **Pantoja** Rangel
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
México
rafael.prangel@academicos.udg.mx
Marithé **Rodríguez** Vieyra
Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
México
maritherv@gmail.com
María Teresa **Dávila** Araiza
Universidad de Sonora
México
tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen

La propuesta tiene que ver con la aproximación de la longitud de arco de líneas curvas de situaciones problema de la vida real, como el juego de pasamanos de un parque urbano, el plano del centro universitario CUCEI de la Universidad de Guadalajara y el arco de un puente peatonal de una carretera, que se fotografían a fin de modelar la línea curva seleccionada para rectificar. Se manipula la fotografía con el software Tracker para obtener datos de la línea seleccionada, mismos que se exportan a GeoGebra para ajustar una función a la trayectoria y obtener un acercamiento a la magnitud de la longitud de arco. Las actividades se realizaron en trabajo individual y colaborativo Los alumnos logran aproximar la longitud de arco con un margen de error muy pequeño, además de que se motivan por relacionar la matemática escolar con el contexto de la vida cotidiana.

Palabras clave: Rectificación de curvas; Longitud de arco; Situación problema; Tracker; GeoGebra, Fotografía.

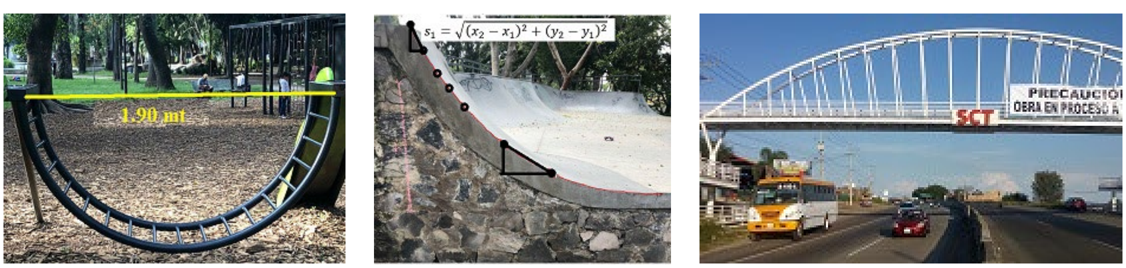
Introducción

En los libros de texto, los ejercicios y problemas del tema longitud de arco o rectificación de curvas como se le llamaba en la antigüedad, se centran en la aplicación de la integral $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$, dada la función y en algunas ocasiones los límites de integración, para luego aplicar alguno de los métodos de integración vistos en clase, desprovisto en su mayoría, de un contexto relacionado con la vida cotidiana, lo que se contrapone a lo mencionado por Hitt (2003), quien afirma que sí la enseñanza del cálculo se restringe solo a los aspectos algebraicos sin poner atención a las distintas representaciones semióticas, los alumnos no comprenderán el cálculo.

A partir de la revisión de textos de cálculo sobre la rectificación de curvas (Stewart, 2012; Purcell, Varbeg y Rigdon, 2007; Larson y Edwards, 2016) se encontró que todos incluyen el procedimiento de aproximar la magnitud de la longitud de una curva con un polígono y sumar los segmentos rectilíneos que lo forman, como una acción para comprender el tema y de ahí se pasan de manera directa a emplear el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para solucionar ejercicios, en los que se dota al estudiante de la función $f(x)$ continua en $x \in [a,b]$ y diferenciable en $x \in (a,b)$ y aplicar la fórmula $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$ para rectificar la curva.

En otro libro se pide calcular la distancia recorrida por una pulga sobre la línea definida por una función en un intervalo dado, lo cual dista mucho de ser un problema de un contexto de la vida cotidiana, que es interesante en principio, que se puede solucionar, pero es difícil concebir que un alumno lo comprenda sin haberlo visualizado y preguntarse si en la realidad la pulga logra caminar sobre la línea definida por la función, lo que conduce a que es un problema ficticio ligado a la construcción de conceptos del cálculo.

En la investigación se desarrollaron actividades para lograr aprendizaje, que hacen referencia al método geométrico para llegar al concepto de longitud de arco y que consiste en tomar un determinado número de puntos sobre la línea curva, construir una poligonal y sumar las longitudes de los segmentos (Guada y Güichal, 1993, p. 29). En el caso que se trata en este artículo, se fotografiaron algunos juegos de una unidad deportiva, como el pasamanos (Figura 1a) y una rampa para patineta (Figura 1b) y el arco soporte de un puente de paso desnivel (Figura 1c) y se seleccionaron algunas líneas a rectificar sobre estos objetos, mediante el apoyo del Tracker, software cuyas rutinas permiten marcar las coordenadas sobre la curva a rectificar. Una vez que se han obtenido las coordenadas, se exportan al software GeoGebra para aproximar la longitud de arco de las líneas elegidas sobre los objetos.



1a 1b 1c

Figura 1. Objetos cotidianos empleados para conceptualizar la rectificación de curvas.

Metodología

El objetivo del proyecto fue evaluar el aprendizaje y comprensión del concepto longitud de arco en estudiantes de nivel superior y su relación con la aplicación a situaciones problema (Hitt y Cortés, 2009) de la vida cotidiana (Oliver, et al, 2013; Pantoja, et al, 2020, 2021, 2022) mediante la rectificación de líneas curvas seleccionadas sobre objetos seleccionados en el contexto del estudiante, con el empleo de la fotografía, los programas computacionales Tracker y GeoGebra y una secuencia didáctica integrada de prácticas matemáticas sustentadas en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).

Las prácticas matemáticas integradas en la secuencia didáctica (Díaz Barriga, 2009), se diseñaron de acuerdo a lo planteado por Godino y Batanero (1994, p. 334), quienes consideran una práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, tabular, analítica, escrita, entre otras), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas, pues estos autores perciben a la matemática como una actividad integradas a la resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Los seis tipos de objetos matemáticos primarios, Situaciones problema, Lenguaje, Conceptos, Proposiciones, Procedimientos y Argumentos, que intervienen en las prácticas matemáticas, son representados (Figura 2) en la forma que sugieren Godino, et al, (2007, p. 130).

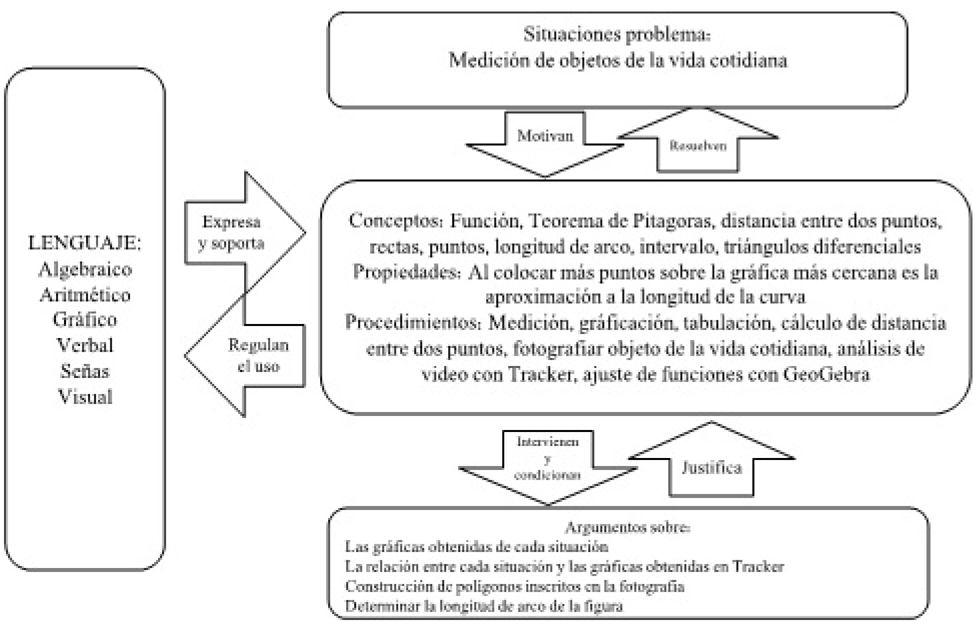
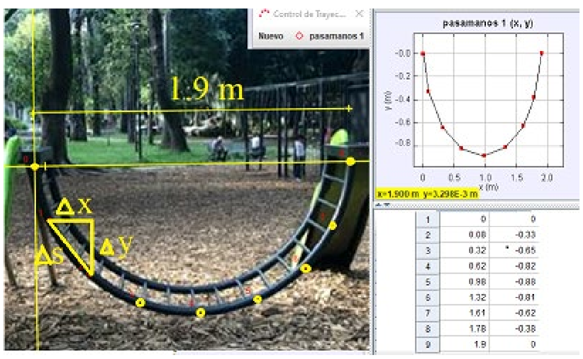


Figura 2. La interpretación en el estudio de los seis tipos de objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas. Tomado de Godino, Batanero y Font (2007) y adaptado para el estudio.

Resultados

Previo a la fase experimental se impartieron dos talleres piloto, para poner en práctica los medios y materiales para el aprendizaje y comprensión de la rectificación de curvas e indagar sobre los aciertos o irregularidades que hubiera que corregir en las hojas de trabajo, la redacción, las gráficas, los tiempos, los manuales de software, entre otros aspectos que pudieran influir en su desarrollo y resultados de la investigación y que se requiere mejorar, incluir o eliminar.

La actividad de apertura fue de preparación para la manipulación del Tracker por clase guiada, apoyado por un video explicativo de las rutinas que se emplean en el análisis de la fotografía del pasamanos, para marcar las coordenadas y exportarlas a GeoGebra y calcular las hipotenusas de los triángulos rectángulos diferenciales construidos (Figura 3), aplicar el teorema de Pitágoras $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ y sumarlas para aproximar la longitud de arco, en este caso con siete segmentos se aproxima a S = 2.50527. Durante el desarrollo de la señalización sobre la línea curva del pasamanos, los estudiantes argumentaron que entre más pequeña sea la medida de los segmentos del polígono.



x_i	y_i	S_i
0.08242	-0.32605	0.39718
0.31828	-0.64562	0.34869
0.61807	-0.82369	0.36239
0.97536	-0.88428	0.35474
1.32219	-0.80983	0.34365
1.61181	-0.62286	0.29806
1.78.19	-0.37892	0.40057
1.90007	0.0033	2.50527

Figura 3. Representaciones semióticas del pasamanos obtenidas con el Tracker.

Se ajustó un polinomio a estos datos y se aproximó la rectificación con el GeoGebra con un valor más preciso, ie, $S = \int_0^{1.9} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2.4803\, m,$ donde $f(x) = 1.52965x^6 - 8.84391x^5 + 20.09042x^4 - 22.59781x^3 + 13.58861x^2 - 4.65181x - 0.00775,$ con lo que culmina las pruebas piloto.

Con la inclusión de los resultados obtenidos en los talleres piloto, actualización de las hojas de trabajo, la redacción, las gráficas, una lectura sobre historia de la rectificación de curvas, los tiempos, la elaboración de videos explicativos y manuales de Tracker y GeoGebra, además de la contingencia sanitaria propiciada por el COVID-19, la fase experimental fue virtual y se ubicó el curso “Longitud de Arco” en el sitio web *Schoology*, en el cual se inscribieron 32 alumnos del segundo semestre de Ingeniería en Mecánica. Las actividades se guiaron con una secuencia didáctica elaborada con el formato de Díaz Barriga (2003) y que se integra tres actividades: apertura, desarrollo y cierre.

La actividad de apertura inició con una discusión sobre la historia de la rectificación de curvas con el empleo de un polígono y la conexión con el procedimiento actual impartido en el aula, como una aplicación de la integral definida. Luego se pide a los estudiantes que rectifiquen la línea curva de una rampa para patineta (Figura 4) que se les entregó en fotografía. Un alumno presentó dos métodos de aproximación para rectificar. El primero consistió en usar la regla graduada e inscribir una línea poligonal de 5 lados en la que consiguió un resultado de 2.5 metros; en el segundo aplicó el teorema de Pitágoras, ya que formó un triángulo rectángulo para encontrar la longitud de la rampa que fungió como hipotenusa y con la medida de referencia y una línea imaginaria como los catetos, así como se muestra en la figura 8 con una mejor aproximación de 2.45 metros.

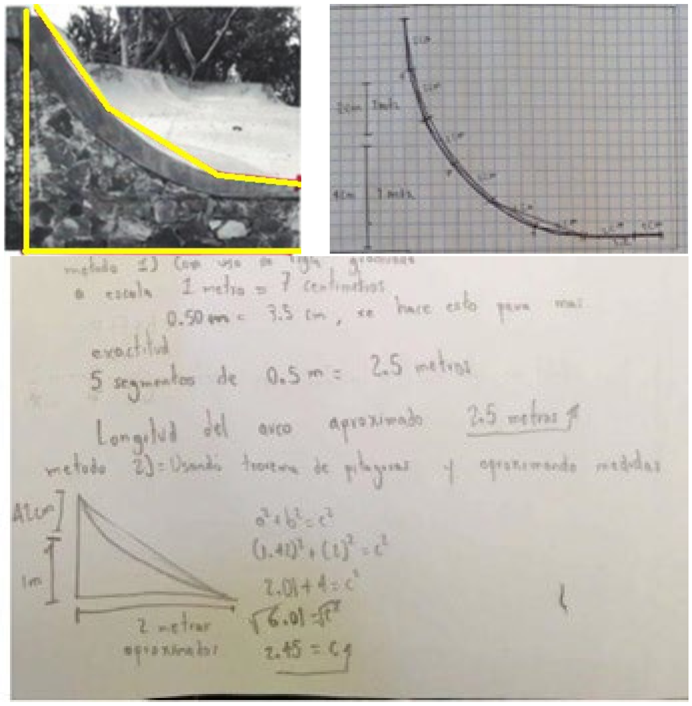
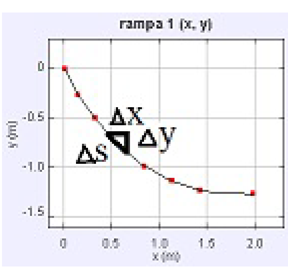


Figura 4. Rampa de patinetas y rectificación de la línea con segmentos rectos.

La tercera forma que se identificó para rectificar la línea sobre la rampa (Figura 5), fue el empleo del Tracker y GeoGebra. Los alumnos aproximaron la longitud de la línea curva de la rampa mediante la suma de los segmentos rectos que unen los puntos marcados con el Tracker sobre la fotografía, para ello se auxiliaron con la hoja de cálculo de GeoGebra y la fórmula de distancia entre dos puntos $s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, logrando una aproximación de 2.4996 cm.



x	y	
0.01038	-0.00346020	S1=0.29557
0.14533	-0.26643598	S2=0.29621
0.32526	-0.50173010	S3=0.22558
0.47405	-0.67128027	S4=0.24976
0.65744	-0.84083044	S5=0.24157
0.84775	-0.98961937	S6=0.31265
1.12457	-1.13494809	S7=0.31732
1.42561	-1.23529411	S8=0.55796
1.98279	-1.26643598	

Longitud=2.4966

Figura 5. Trabajo de un estudiante realizado en computadora.

En el proceso se cuestionó a los alumnos si la variación de puntos marcados sobre la fotografía modificaba el valor de la magnitud y un alumno responde:

> … lo que observé es que al hacer más pequeño cada segmento de la recta, "**x**" y "**y**" cambiaron sus valores, por ejemplo, el valor de "**x**" comenzó hacerse más pequeño, comenzó a disminuir, en cambio el valor de "**y**" comenzó a crecer, aumentó de tamaño. Porque al hacer más pequeños los segmentos, estamos recorriendo los puntos en la gráfica, esto hace que en "**x**" se recorran mas cerca de 0, entonces pos eso sus valores se van haciendo más pequeños, y en "**y**" los puntos se van recorriendo hacia arriba, entonce se van alejando de 0 y por lo tanto la cantidad se hace mas grande.

A estas mismas coordenadas se ajustó el polinomio $f(x) = -0.1256x^3 + 0.8227x^2 - 1.7762x - 0.0022$ y se procedió a integrar con resultado ***Integral[sqrt(1 + f´(x)²), 0.01, 1.98]*** =2.48026 m.

La opinión de los alumnos respecto del trabajo desarrollado fue muy puntual e indica que identificaron plenamente el propósito que jugaron el Tracker y GeoGebra en la propuesta didáctica:

> En el método y los programas utilizados me parece que los dos son buenos (Tracker y GeoGebra) porque en uno podemos sacar las coordenadas y en el otro podemos ajustarla para que nos dé un número de aproximación.

Con estos antecedentes se llevó a cabo la actividad de cierre, se organizó a los alumnos de manera aleatoria y se agruparon en equipos de 3 a 4 personas y se eligieron a los que expusieron sus procedimientos, resultados y opiniones del taller. Puesto que fueron 3 grupos de Ingeniería en Mecánica, se seleccionaron 3 fotografías en las que se mostraban diferentes líneas curvas (Figura 6) a rectificar.

Figura 6. Fotografías de objetos de forma curva utilizados.

Los estudiantes escribieron un reporte por equipo sobre el desarrollo de la actividad de cierre, en el que incluyeron una introducción del tema longitud de arco, así como los procedimientos que utilizaron en Tracker y GeoGebra para lograr la aproximación y escribieron sus resultados y conclusiones sobre el taller:

> Al momento de que nosotros realizamos esa práctica nos dimos cuenta la gran ventaja que podemos obtener del cálculo integral, ya que con él nos facilitamos más las cosas, en caso de las ingenierías, porque como podemos ver para todas las cosas hay solución, esto es, que cualquier problema de la vida cotidiana que se nos presente será fácil de resolver, también pudimos observar como a nosotros los alumnos nos funciona la tecnología para todo, no solo para estar conversando, sino que también tenemos softwares que nos podrán ayudar para dichas resoluciones de los problemas de la vida cotidiana.

Estos comentarios vertidos por un equipo son acertados, pues evidencian que se propició una relación intrínseca entre la matemática escolar, las situaciones problema y las TIC, que motivaron al aprendizaje de las matemáticas y su aplicación en áreas de la ingeniería, como son las unidades deportivas y los invernaderos.

En el aspecto de la valoración del curso, opinaron que

> Era una manera muy agradable y no tan enfadosa de aprender, pues la disposición de la asesora para solucionar dudas en todo momento fue atenta y muy bueno porque nos apoyaba en todo.

En la presentación de los reportes, los alumnos explicaron de manera verbal lo realizado en el taller y al terminar, se les hizo algunas preguntas sobre el trabajo en equipo. La mayoría de los equipos mencionó que, a causa de la distancia, se dividieron el trabajo para realizar un trabajo cooperativo, para al final unir y entregar un solo producto; también comentaron que el reparto de tareas la realizaron considerando las cualidades de sus compañeros, pues observaron y reconocieron en su equipo al que tuvo la facilidad al usar los programas como Tracker y GeoGebra e identificaron al que poseía la habilidad de redacción.

Los resultados son prometedores para una alternativa didáctica para el tema, porque en un curso tradicional de matemáticas, sólo se consideran las actividades de solución de problemas y exámenes para valorar el trabajo de los alumnos, salvo que en ocasiones se les deja un trabajo de investigación, pero rara vez se les pide un informe sobre lo desarrollado en clase y que lo expongan, con una presentación elaborada ante todo el grupo.

Los estudiantes comentaron sobre la importancia de la tecnología en sus clases e hicieron hincapié en la inclusión de diferentes materiales en la clase de matemáticas, pues mostraron su inconformidad hacía las clases tradicionales, también comentaron que lograron entender conceptos matemáticos, como el empleo del Teorema de Pitágoras en las actividades, así como el tema de longitud de arco el cual afirmaron que encontraron interesante, puesto que sólo lo habían estudiado una vez sin profundizar en el tema.

Conclusiones

La rectificación de curvas es un tema que motivó a los estudiantes a aprender como una forma complementaria a la tradicional, porque sustentado en el análisis de las evidencias, manifestaron interés por relacionar el trabajo a lápiz y papel con las TIC, en la búsqueda de lograr un aprendizaje significativo, pues fue sorprendente la forma en cómo rectificaron las líneas curvas sobre los objetos cotidianos que se les plantearon, con métodos que no ponen en práctica en sus clases los profesores, optando por la enseñanza expositiva que no siempre favorece el aprendizaje de los estudiantes.

Los conocimientos previos que posee el estudiante para el tema son importantes y se debe desarrollar alguna estrategia para averiguarlos, porque permitirá al profesor identificar las limitaciones y las ventajas con las que cuenta para iniciar con el proceso de aprendizaje, tal y como se planteo en las dimensiones de la idoneidad didáctica.

Antes de la pandemia del COVID-19 se habían diseñado para un ambiente colaborativo, pero por la pandemia el tema fue tratado a distancia y no existe evidencia determinante que nos permita afirmar si hubo trabajo colaborativo, pues solo se dispone de los comentarios de que se distribuyeron las actividades y al final las reunieron para entregar un producto, tal y como lo propone el trabajo cooperativo.

Las actitudes, valores y emociones de los actores fueron un agregado que emergieron y apoyaron el desarrollo de las actividades, porque es de todos sabido los obstacúlos que se generaron por la pandemia del COVID-19, pero que por mucho fueron superados y se logró que los alumnos se motivaran para aprender la recificación de curvas en la modalidad a distancia, logrando relacionar la matemática escolar con situaciones problema de la vida cotidiana.

La selección de medios y materiales adecuado son una parte importante de una propuesta didáctica, que para este proyecto fueron la cámara fotográfica, el Tracker y el GeoGebra y son considerados por los alumnos como indispensables para realizar la secuencia y obtener los resultados esperados en la investigación. Es relevante mencionar que se elaboraron manuales de operación para el Tracker y GeoGebra para el tema de longitud de arco.

Referencias Bibliográficas

Díaz Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *Comunidad de conocimiento.* UNAM: México. Recuperado en junio 2019 de www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20primera%20Evaluacion/Factores%20de%20Evaluacion/Práctica%20Profesiona/Guia-secuencias-didacticas_Angel%20Díaz.pdf .

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8 (11)*, p. 111-132.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), p. 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39 (1),* p. 127-135.

Guala, G. y Güichal, E. (2021). Longitud de arco de cicloide. *Revista de Educación Matemática, 8*(2), p. 29-42. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11079.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *11º Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia.

Hitt, F. y Cortés J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de la calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital matemática, educación e internet. 10(1).* pp. 1-30.

Larson, R. y Edwards, B. (2016). C*álculo, Tomo I. Décima Edición*. México: Cengage Learning Editores.

Oliver, E., Aguilar, M., Pizano, I., Carapia, L., y Jiménez, M. (2018). El uso de GeoGebra para solución numérica de integrales como una aplicación para el cálculo de la longitud de arco. *Pistas Educativas*, *33*(104), p. 125-140.

Pantoja, R. (2020). La fotografía de hojas de árbol aplanadas como mediador para propiciar aprendizaje del cálculo de áreas. *Brazilian Journal of Development,* (6) 3: 9923-9940. DOI:10.34117/bjdv6n3-028.

Pantoja, R., Arciga, M., Yakhno, A. y Puga, K. L. (2022). Mathematical Understanding of How a Car Engine Cooling System Works. *Pure and Applied Mathematics Journal*. 11(5): 78-83. doi: 10.11648/j.pamj.20221105.11. ISSN: 2326-9812 (Online).

Pantoja, R., Sánchéz, M. T., López, M. E. y Pantoja.G, R. (2021). Examples to relate school mathematics to everyday life mediated by video, Tracker and GeoGebra. South Florida Journal of Development, Miami, 2 (3), 4417-4434. DOI: 10.46932/sfjdv2n3-046. ISSN 2675-5459

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.