A propósito de la enseñanza y aprendizaje de la completitud de ℝ

María Alexandra **Fregueiro**
Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación
Uruguay
suresmeralda@hotmail.com
Analía **Bergé**
Université du Québec à Rimouski
Canadá
analia_berge@uqar.ca

Resumen

En esta comunicación presentamos los principales resultados de una investigación doctoral sobre la enseñanza y el aprendizaje de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales (ℝ). En nuestra investigación nos propusimos analizar y describir las conceptualizaciones sobre la completitud que construye un grupo de estudiantes del profesorado de matemática uruguayo en interacción con una propuesta de enseñanza cuyo diseño considera la dialéctica herramienta-objeto, el juego de marcos (Douady, 1992) y el metadiscurso de las nociones FUG (Dorier, 1995).

Utilizamos un enfoque metodológico interpretativo-cualitativo y como método el estudio de casos (Bisquerra, 2009). El análisis e interpretación de los datos nos permite afirmar que el conocimiento sobre la completitud de los estudiantes que intervinieron en esta investigación se vio modificado. En algunos casos se transformó de un conocimiento implícito a un conocimiento explícito movilizable y en otros casos de un conocimiento explícito inicial a un conocimiento explícito flexible.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación superior; Enseñanza; Formación docente inicial; Dialéctica herramienta-objeto; Nociones FUG; Enseñanza del análisis matemático; Completitud de ℝ; Consejo de Formación en Educación; Uruguay.

Introducción

El sistema de los números reales (ℝ) es el dominio numérico donde se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático. La posibilidad de demostrar ciertas propiedades y definir nuevos objetos matemáticos en ℝ y no en ℚ está dada por una propiedad que distingue a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud de ℝ. En el curso de Análisis de variable real del profesorado de matemática en Uruguay (denominado Análisis 1), la propiedad de completitud de ℝ se introduce con el enunciado de la propiedad del supremo. Esta introducción, ¿qué ideas de la completitud privilegia y qué oportunidades ofrece para que los estudiantes puedan usarla explícitamente? Una primera formulación de nuestro cuestionamiento didáctico es: ¿qué tratamiento de la propiedad de completitud favorecería que los estudiantes consideren esta propiedad como necesaria y útil para el trabajo matemático? ¿Cómo hacer para que los estudiantes pongan en funcionamiento la propiedad de completitud reconociendo su relevancia en la demostración de propiedades y en la definición de objetos matemáticos? Para transformar este cuestionamiento en una pregunta de investigación es necesario apoyarse en constructos teóricos y analizar el estado de la cuestión en el campo de la didáctica de la matemática.

Estado del arte

Para abordar como un problema la enseñanza y el aprendizaje de la completitud de ℝ consideramos necesario tomar distancia de dicha noción y entender cómo, por qué y en qué contexto se hizo necesaria su aparición en la matemática. Tomamos como referencia el trabajo de Bergé y Sessa (2003) quienes señalan tres estados epistemológicos de la propiedad de completitud en distintos momentos de la historia de la matemática: como un atributo implícito, como un atributo explícito, aunque naturalmente aceptado, y como una propiedad explícita y demostrable. Los problemas donde la completitud se hace necesaria están relacionados con los fundamentos del Análisis y con la construcción de pruebas formales (de existencia de un elemento del sistema numérico real) que en muchos casos son evidentes desde una perspectiva gráfica.

Diversas investigaciones que tratan la introducción de la completitud vía la noción de supremo dan cuenta de ciertas dificultades que pueden manifestar los estudiantes durante el proceso de conceptualización (Bergé 2016, 2008; Acevedo, 2011; Bills y Tall, 1998). Estas nos interesan particularmente porque el trabajo reportado en el aula es similar al de los cursos de Análisis 1 del profesorado uruguayo. Algunas dificultades parecen estar relacionadas a las estructuras, objetos y relaciones lógicas que entran en juego en la construcción de su definición formal (Chellougui, 2016); a determinar y justificar la existencia de cotas superiores, inferiores, supremo e ínfimos de conjuntos dados (Sari et. al, 2018; Hernández y Trigueros, 2012). Las actividades y el tipo de preguntas propuestas en las investigaciones nos permiten conjeturar que los cursos "típicos" de Análisis privilegian un tratamiento del supremo sin considerar los contextos particulares de uso y centrado en analizar las propiedades y características de esa noción sin hacer explícita la necesidad de su existencia.

Estos trabajos evidencian que el tratamiento usual vía el supremo de la propiedad de completitud en los cursos iniciales de Análisis no parece contribuir a que los estudiantes construyan con sentido la noción de completitud y logren ponerla en funcionamiento identificando su uso en situaciones específicas en su doble carácter de herramienta y de objeto.

Marco conceptual

La puesta en juego de la completitud puede presentarse e interpretarse en diversos contextos: gráfico, geométrico, algebraico, aritmético, etc., que pueden leerse como diferentes *marcos* en el sentido de Douady (1992). Nos interesa explorar la posibilidad de pensar situaciones de enseñanza donde la completitud pueda interpretarse transitando por diversos marcos. Esta movilización e interpretación de un mismo problema en diferentes marcos, es denominada por Douady (1992) *juego de marcos*. Por otra parte, Douady (1995, 1992) afirma que para un concepto matemático conviene distinguir su carácter de herramienta (H) y su carácter de objeto (O). Vemos el carácter de herramienta de la completitud desplegarse cuando la misma es utilizada para resolver una situación contextualizada y particular; por ejemplo para probar la convergencia de sucesiones, la existencia de raíces o de extremos absolutos de funciones bajo determinadas condiciones. Cuando el interés en la completitud se presenta desligado de los contextos particulares de uso y se busca caracterizar dicha propiedad de forma general y analizar la interrelación con otras nociones matemáticas, se hace explícito su carácter de objeto. Tomamos de Douady (1995) las siguientes caracterizaciones: un alumno ***ha aprendido*** cierta noción matemática si es capaz de hacerla funcionar en su doble carácter de herramienta y de objeto. Para el docente, ***enseñar*** cierto conocimiento matemático implica crear las condiciones que permitirán la apropiación del mismo por parte del alumno, lo que requiere cierta organización. En el contexto de la enseñanza y el aprendizaje, la dialéctica herramienta-objeto es un proceso cíclico que organiza los roles del profesor y de los estudiantes, durante este proceso los conceptos matemáticos desempeñan el papel de herramienta cuando son usados en la resolución de un problema y de objeto cuando son definidos y caracterizados en la construcción de un conocimiento organizado durante su institucionalización escolar.

Hay nociones matemáticas cuyo aprendizaje representa en buena medida un salto con respecto a los conocimientos previos de los estudiantes: su presentación en el aula involucra la definición de nuevos objetos matemáticos o la introducción de un nuevo formalismo, o de nueva simbología, o responden a la necesidad de unificar o generalizar conocimientos. Las nociones con estas características han sido denominadas nociones o conceptos FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995) justamente por su carácter formalizador, unificador y generalizador. Pensamos que la propiedad de completitud puede ser interpretada como una noción FUG por las razones que detallamos a continuación. En los cursos universitarios donde la completitud se introduce con el enunciado de la propiedad del supremo, se hace necesario definir nuevos objetos matemáticos, nuevas palabras e introducir una nueva simbología, característica formalizadora de la noción en el sentido de Robert (1998). La completitud permite unificar nociones ya conocidas de manera compartimentada por los estudiantes, como ser el comportamiento de ciertas sucesiones numéricas y las propiedades de ciertas funciones continuas en intervalos cerrados. El trabajo matemático en un cuerpo ordenado y completo posibilita asegurar y generalizar la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, y ciertas características de todas las funciones continuas en intervalos cerrados. Considerar la completitud como una noción FUG nos posibilita tomar en cuenta las recomendaciones didácticas de autores que han trabajado en la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de nociones. Estos investigadores consideran que las nociones FUG difícilmente pueden ser introducidas en el aula a partir de una situación fundamental en el sentido de Brosseau (2002); afirman que son nociones que requieren de una enseñanza a largo plazo y de la elaboración de un discurso particular por parte del docente para generar la reflexión en el aula sobre las nociones puestas en juego (Dorier, 1995).

La pregunta de investigación y los objetivos específicos

El diseño de propuestas de enseñanza de la propiedad de completitud privilegiando la dialéctica *herramienta-objeto* y el juego de marcos es, a nuestro conocimiento, un camino que hasta el momento no ha sido explorado. A la luz del estado del arte y los constructos teóricos desarrollados, nos proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo evoluciona la comprensión de estudiantes del curso de Análisis 1 del profesorado uruguayo a propósito de la propiedad de completitud de los números reales a partir de una propuesta de enseñanza que privilegie en su diseño la dialéctica Herramienta-Objeto, el juego de marcos y el metadiscurso de las nociones FUG?

Con el fin de dar respuesta a esta pregunta nos fijamos los siguientes objetivos específicos:

- Explorar formas de favorecer que los estudiantes pongan en funcionamiento el carácter de herramienta explícita y de objeto de la propiedad de completitud de ℝ.
- Describir las conceptualizaciones que construyen los estudiantes sobre la completitud de ℝ en términos de herramienta implícita, herramienta explícita y de objeto como fruto de la interacción con las formas resultantes de dicha exploración.

Metodología

El trabajo se enmarca en una metodología cualitativa dentro del paradigma interpretativo-cualitativo y el método utilizado es el estudio de casos (Bisquerra, 2009). El contexto de nuestra investigación se ubica en el dictado de la asignatura perteneciente al núcleo específico del segundo año de la carrera, denominada Análisis 1 en el profesorado de matemática uruguayo. Es una carrera de nivel terciario que tiene una duración de cuatro años y está compuesta por tres núcleos formativos: núcleo de formación profesional común, núcleo específico y núcleo didáctica-práctica docente. Participaron de la experiencia cuatro estudiantes que ya habían cursado esta asignatura, dos de ellos ya la tenían aprobada al momento de la experiencia y otros dos la estaban recursando.

Recolección de los datos

Para recabar la información, acorde a los objetivos específicos de este trabajo, utilizamos tres tipos de técnicas cualitativas: instrumentos, estrategias y medios audiovisuales (Bisquerra, 2009, p. 1551).

Los instrumentos

1- El diseño de un conjunto de indicadores que hemos denominado niveles de funcionamiento y niveles de conocimiento de la completitud de $\mathbb{R}$ que sustentaron tanto el análisis a priori de la secuencia de enseñanza como la interpretación y descripción de las conceptualizaciones que construyeron los estudiantes en interacción con la secuencia.
2- El diseño de una secuencia de enseñanza en torno a la propiedad de completitud que permitió explorar formas de poner en funcionamiento la completitud en su doble carácter de herramienta y de objeto (Douady, 1992) y tomar en cuenta las sugerencias que plantean varios autores acerca de la enseñanza de las nociones FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995, Bridoux, 2012).

Los niveles de funcionamiento y de conocimiento de la completitud de $\mathbb{R}$

Para este diseño tomamos ideas de varios autores: las nociones de herramienta implícita, herramienta explícita y objeto de Douady (1995,1992). Por otro lado, consideramos el carácter diferenciador de la completitud como noción FUG en el sentido de Chorlay (2019). Por último, readaptamos la caracterización de herramienta explícita de prueba y para definir objetos matemáticos en el sentido de Jovignot (2018). Resumimos los niveles de funcionamiento en la siguiente tabla:

Tabla 1
Niveles de funcionamiento de la completitud de $\mathbb{R}$.

Funcionamientos	Subniveles	Descripción. El estudiante…
Herramienta implícita (HI)		…usa la completitud sin identificarla. Por ejemplo: asegura la convergencia de una sucesión real monótona y acotada sin poder dar una justificación.
Herramienta explícita (HE). Este funcionamiento requiere que el estudiante identifique a la noción como objeto y la use de forma intencional.	Diferenciadora (HED)	…usa algún enunciado de la completitud para probar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son cuerpos totalmente ordenados distintos, el primero completo y el segundo no.
	Para definir objetos matemáticos (HEDO)	…usa algún enunciado de la completitud para definir objetos matemáticos. Por ejemplo: $\mathbb{I} = \{l/l = \sup(A), A \subset \mathbb{Q}, A \neq \emptyset, A \text{ acot. sup. en } \mathbb{Q}, A \text{ no admite supremo racional}\}$
	De prueba (HEP)	…identifica el uso de la completitud en el desarrollo de demostraciones que la requieran. Por ejemplo: en la demostración del TVI.
Objeto	Inicial (OI)	…conoce un enunciado de la completitud pudiendo o no ponerla en funcionamiento como HE.
	Movilizable (OM)	…conoce más de un enunciado de la completitud pudiendo o no identificar la equivalencia entre ellos y es capaz de usarla como HE.
	Flexible (OF)	… conoce más de dos enunciados de la completitud, identifica la equivalencia entre ellos y pone en funcionamiento la noción como HE.

Fuente: elaboración propia

Tomando como referencia el trabajo de Douady (1992) diremos que un estudiante tiene conocimiento sobre la propiedad de completitud en la medida que es capaz de poner en funcionamiento su carácter de herramienta explícita y su carácter de objeto; identificamos entonces distintos niveles de conocimiento de la completitud utilizando los niveles de funcionamiento mencionados en la Tabla 1. Resumimos los niveles de conocimiento en la Tabla 2.

Tabla 2
Niveles de conocimiento de la completitud de ℝ.

Funcionamientos →	Herramienta implícita	Herramienta explícita			Objeto		
↓Nivel de conocimiento		HED	HEDO	HEP	OI	OM	OF
Implícito (CI)							
Implícito (CI)							
Explícito inicial (EI)							
Explícito movilizable (EM)							
Explícito movilizable (EM)							
Explícito flexible (EF)							

Fuente: elaboración propia

A modo de ejemplo, un estudiante muestra un conocimiento *implícito* (CI) de la completitud si la propiedad funciona como herramienta implícita (HI), pudiendo o no funcionar como objeto inicial (OI). Un estudiante tiene un conocimiento *explícito movilizable* (EM) de la completitud si la utiliza como herramienta explícita diferenciadora (HED), para definir objetos (HEDO) y para hacer pruebas (HEP) pudiendo funcionar como objeto inicial (OI) o como objeto movilizable.

La secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza consta de 8 actividades que fueron desarrolladas es modalidad taller con una duración de 14 horas distribuidas en 4 sesiones. Apunta a formular en la clase una primera formulación de la completitud de ℝ considerando el enunciado “toda sucesión real monótona creciente y acotada superiormente es convergente en ℝ” y la demostración por parte de los estudiantes de la equivalencia de cuatro enunciados de esta propiedad: 1- Toda sucesión real monótona creciente y acotada superiormente es convergente en ℝ; 2- Toda sucesión real monótona y acotada es convergente en ℝ; 3- Todo par de sucesiones reales monótonas adyacentes es convergente a un mismo valor límite en ℝ (es un par de sucesiones monótonas convergente); 4- Todo subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene supremo real.

La organización de las actividades de la secuencia responde a la intención de ir construyendo y demostrando esta equivalencia con institucionalizaciones intermedias en el sentido de Bridoux (2012). La demostración de dicha equivalencia pone en funcionamiento la completitud como herramienta explícita y como objeto. Para esto es necesario elaborar un discurso específico por parte del docente denominado metadiscurso (Dorier, 1995). Con este tratamiento de la completitud en el aula buscamos mostrar la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ en el trabajo matemático en Análisis y hacer explícita esta propiedad como diferenciadora de $\mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$ (en el sentido de Chorlay, 2019).

Resultados obtenidos

Realizamos el análisis e interpretación de los resultados obtenidos considerando los funcionamientos identificados en las producciones de cada estudiante en cada una de las actividades que componen la secuencia. Los funcionamientos y los niveles de conocimiento identificados en el trabajo de los estudiantes nos permitieron describir las conceptualizaciones que ellos van construyendo sobre la completitud en interacción con la secuencia de enseñanza. Resumimos los niveles de funcionamiento identificados en las producciones de los estudiantes vinculados a cada actividad (Tabla 3).

Tabla 3
Niveles de funcionamiento de los cuatro estudiantes en cada actividad

Actividades	**Niveles de funcionamiento.**			
	Andrea	**Elena**	**Mónica**	**Víctor**
Actividad 1	HI	HI	HED, OI	HED, OI
Actividad 2	HI, OI	HEDO, OI	HEDO, OM	HEDO, OM
Actividad 3	HEP, HED, OM	HEP, HED, HEDO, OM	HEP, HED, HEDO, OM	HEP, HED, HEDO, OM
Actividad 4	HEP, HED, OM	HEP, HED, OM	HEP, HED, OM	HEP, HED, OM
Actividad 5	HED, OM	HED, OM	HEP, HED, OM	OM
Actividad 6	HEP, OM	HEP, OM	HEP, OM	HEP, OM
Actividad 7	HEDO, HED, OM	HEDO, OM	HEDO, HEP, OF	HEDO, HEP, OM
Actividad 8	HED	HEP, HED, OM	HED, HEP, OF	HED, HEP, OF

Fuente: elaboración propia

Los niveles de funcionamiento de la completitud identificados en las producciones de los estudiantes están puestos en relación con los niveles de conocimiento de la completitud de $\mathbb{R}$. Esta relación entre los niveles de funcionamiento y los niveles de conocimiento identificados nos permitieron elaborar una explicación acerca de cómo evolucionó la conceptualización sobre la propiedad de completitud en interacción con la secuencia de enseñanza. Hemos constatado que se aprecia una modificación entre el nivel de conocimiento inicial, el nivel de conocimiento a lo largo de la secuencia y el nivel de conocimiento al finalizar la secuencia. En la siguiente tabla

(Tabla 4) presentamos un resumen de los niveles de conocimientos identificados durante el análisis.

Tabla 4

Niveles de conocimiento inicial/final de los estudiantes

Estudiantes	**Nivel de conocimiento inicial**	**Nivel de conocimiento durante el desarrollo de la secuencia/ nivel de conocimiento final**
Andrea	Implícito.	Implícito/Explícito movilizable.
Elena	Implícito.	Explícito inicial/Explícito movilizable.
Mónica	Explícito inicial.	Explícito movilizable/Explícito flexible.
Víctor	Explícito inicial.	Explícito movilizable/Explícito flexible.

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

Consideramos que la secuencia diseñada como parte de nuestra investigación, que privilegia la dialéctica herramienta-objeto y el metadiscurso de las nociones FUG, es un posible camino para que los estudiantes logren modificar su conceptualización de la propiedad de completitud. En este escrito mostramos resumidamente, que las conceptualizaciones de cuatro estudiantes se modificaron, transformándose de un conocimiento implícito/explícito inicial a un conocimiento explícito movilizable/explícito flexible.

Referencias y bibliografía

Acevedo, C. (2011). *Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basado en la teoría APOE* (Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México).

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *6*(3), 163-197.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 217-235.

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels, TWG1: Calculus and Analysis, In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds), *Proceedings of the frist International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016,* pp. 33-42, Montpellier (France). https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016

Bills, L. y Tall, V. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The Case of the Least Upper Bound. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 104-111). Stellenbosch: Program Committee of the 22nd PME Conference.

Bisquerra, R. (2009). Metodología de la Investigación Educativa. Madrid: Editorial La Muralla.

Bridoux, S. (2012). Notions de topologie: élaboration de leviers didactiques à intégrer dans un enseignement pour favoriser les apprentissages des étudiants. In *Actes du Colloque EMF 2012* (pp. 327-350).

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990.* Kluwer Academic Publishers.

Chellougui, F (2016). Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de « borne supérieure », TWG3: Logic, Numbers and Algebra. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds), *Proceedings of the first International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016,* pp. 266-275, Montpellier (France). https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016

Chorlay, R. (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 5, 267-314.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational studies in mathematics*, *29*(2), 175-197.

Douady, R. (1992). Contribución de la didáctica de las matemáticas a la docencia. *Referencias Irem*, *6*, 132-158.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de la relación con el conocimiento matemático. *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hernández, L. A., & Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática, 24*(3), 99-119.

Jovignot, J. (2018). L'analyse épistémologique du concept d'idéal et ses apports à l'étude didactique En M. Bächtold, V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.). *Epistémologie & didactique* (pp. 61-73). Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert. A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des matématiques, 18*(2), 139-190.

Sari, C. K., Machromah, U. y Purnomo, M.E. R. (2018). Finding and proving supremum and infimum: students' misconceptions. *Journal of Physics: Conference Series.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012007