Bitácora digital como herramienta para el desarrollo de escenarios de aprendizaje basados en una visión inquisitiva de resolución de problemas matemáticos

Daniel **Ortiz** May
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
daniel.ortiz@cinvestav.mx

Resumen

Se propone el concepto de bitácora digital como una forma de estructurar y registrar el trabajo de los estudiantes en actividades de resolución de problemas matemáticos que involucran el uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en escenarios de aprendizaje en línea. La bitácora digital consiste en un repositorio en donde se evidencian los momentos clave en el proceso de resolver problemas por medio de diversos recursos digitales tales como texto, imágenes, videos, modelos dinámicos de GeoGebra, etc. En esta presentación, se expone el trabajo de estudiantes de un programa de posgrado en un taller de resolución de problemas totalmente llevado a cabo vía remota, con la intención de ilustrar la idea de una bitácora digital para regular y guiar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

Palabras clave: Educación superior; Resolución de problemas; Aula virtual; Investigación cualitativa; México.

El rol de las tecnologías digitales en la educación matemática

En la última década los avances en materia educativa han estado orientados a vislumbrar enfoques sobre el desarrollo de ideas matemáticas en escenarios remotos, ampliando la naturaleza de los espacios de aprendizaje. Particularmente, las matemáticas se conciben como una disciplina que implica grandes dificultades para llevarse a cabo en ambientes asíncronos; aún son relativamente inexplorados aspectos vinculados al desarrollo profesional de recursos tecnológicos en ambientes en línea, al modo de emplear e implementar soportes cognitivos y sociales para aprendices en ambientes en línea, las dinámicas relacionadas con la evaluación entre pares, alternativas de evaluación de cursos en línea y formas de brindar retroalimentación a los estudiantes (Johns & Mills, 2021; Martin et al., 2020; Trenholm et al., 2015). Diseñar e implementar modelos de enseñanza remotos implica repensar el tipo de escenarios donde sea explícito el papel de las tecnologías digitales en las formas de interacción entre los estudiantes y profesores en el estudio de los conceptos matemáticos (Laborde, 2002).

Santos Trigo et al., (2022) destacan que el uso de tecnologías digitales permite a los estudiantes extender el tipo de actividades que se realizan en ambientes presenciales de aprendizaje. Por ejemplo, pueden hacer consultas sobre explicaciones de conceptos en sitios web o foros de discusión, de modo que la búsqueda, discernimiento y comunicación de la información se convierten en competencias que forman parte de la metacognición de los estudiantes al momento de resolver problemas. Bajo este enfoque, la construcción de conocimiento matemático puede generarse a través del trabajo en línea cuando se basa fundamentalmente en la comunicación y compartición de recursos, herramientas e información (Engelbrecht et al., 2020). No obstante, una de las principales brechas que existen en la forma de desarrollar conocimiento matemático en aulas virtuales en comparación con salones de clases físicos, es el acceso limitado que tienen los profesores a ofrecer orientación o retroalimentación a través de indicativos sutiles sobre el nivel de entendimiento de los estudiantes, tales como momentos eureka o expresiones faciales (Mullen, et al., 2021). En este sentido, la noción de una *bitácora digital* emerge como una herramienta en la que se aprovechen los recursos digitales a su disposición de modo que permitan a los estudiantes registrar, comunicar y reflexionar sobre sus propias experiencias de aprendizaje, de modo que se expliciten los razonamientos que surgen a lo largo del trabajo en tareas matemáticas. A su vez, un registro sobre los procesos de resolución de problemas de los estudiantes ofrece la oportunidad de analizar y de retroalimentar las ideas expuestas por los estudiantes al incluir diferentes aproximaciones, exploraciones dinámicas, discusiones relacionadas con los conceptos involucrados en los problemas apoyadas en videos o plataformas línea (Santos-Trigo et al., 2022). De este modo, el presente trabajo pretende contribuir al problema de investigación planteado en la pregunta siguiente: ¿De qué manera puede coordinarse el uso de tecnologías digitales para promover y guiar a los estudiantes en la comprensión de conceptos y en el desarrollo de competencias de resolución de problemas matemáticos en un ambiente de aprendizaje virtual?

Marco conceptual

Santos Trigo y Reyes-Martínez (2019), describen la noción *de problematizar* los contenidos matemáticos como una concepción del quehacer matemático orientada a la conciliación de dilemas; se concibe el razonamiento matemático como la capacidad de llevar a cabo procesos cognitivos tales como la resolución de problemas, justificación de conjeturas, validación de hipótesis, comunicación y conexión entre conceptos y sus representaciones, es decir, habilidades necesarias en la práctica disciplinar. Los estudiantes se involucran en la problematización de los contenidos matemáticos justamente a medida que se enganchan en procesos de entendimiento y representación de conceptos al momento de trabajar en tareas matemáticas, así como en el proceso de generar diversas formas de comunicar y validar sus resultados. Bajo esta perspectiva, es fundamental que los propósitos de la enseñanza estén dirigidos a promover un enfoque inquisitivo de resolución de problemas: procurar que el trabajo de los estudiantes sobre las tareas matemáticas esté regido por el planteamiento y seguimiento de preguntas orientadas a interpretar, representar, explorar y encontrar diversos caminos de solución (Santos-Trigo & Camacho, 2013). Santos-Trigo et al. (2022) proponen una organización teórica que enmarca el trabajo de resolución de problemas bajo la construcción de una bitácora digital. Este concepto se basa principalmente en el marco RASE (Churchill et al., 2016) para el diseño de aprendizaje en escenarios virtuales, con la introducción de elementos que apuntan a la problematización de la disciplina. Estos se resumen en la Figura 1. La construcción de la bitácora digital se halla en el centro de las actividades de los estudiantes, pues es a partir de ella puede monitorearse y registrarse el aprendizaje de estos. ¿Cuáles son los elementos relevantes que constituyen el contenido de esta bitácora? Pues bien, la construcción de este registro se basa en tres elementos interrelacionados: una visión inquisitiva de resolución de problemas, el uso de recursos y el soporte en línea.

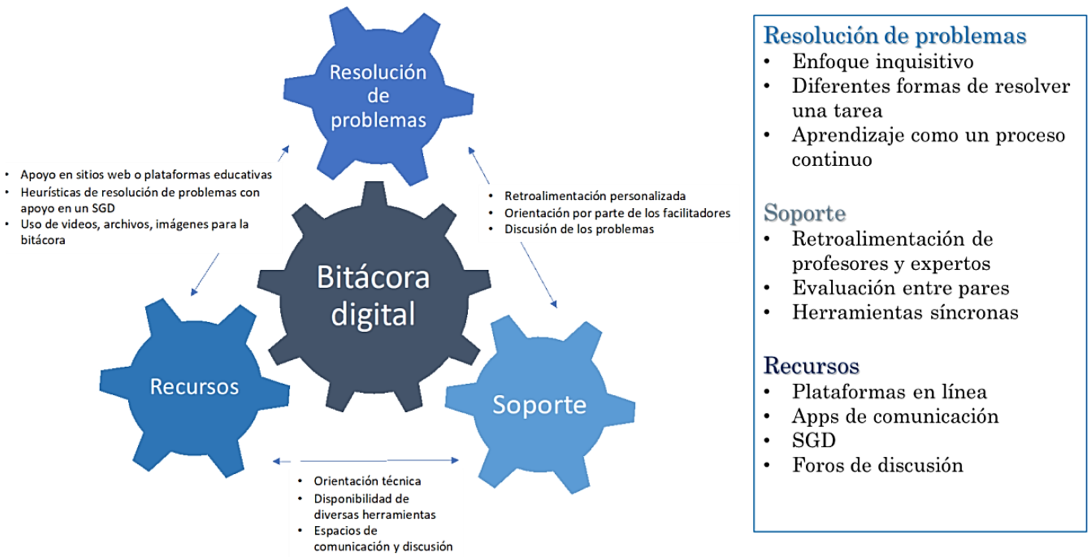


Figura 1. Elementos teóricos de la bitácora digital

Un enfoque inquisitivo de resolución de problemas

Las tareas matemáticas son el vehículo para que los estudiantes se enganchen en actividades de resolución de problemas. Plantear constantemente diferentes formas de resolverlas se vuelve una actividad importante para desarrollar su pensamiento (Santos-Trigo et al., 2022).

Una concepción ampliada de los recursos de los estudiantes

El concepto de recursos que Schoenfeld (2011) describe involucra considerar en el proceso de resolución de problemas aquello que el individuo conoce y, por lo tanto, contribuye a la construcción de metas y submetas de solución. La inmersión de los estudiantes en contextos virtuales difumina la línea entre lo que los estudiantes conocen a priori y el conocimiento al que tienen acceso: se considera relevante incluir el uso coordinado de tecnologías digitales que pueden utilizar para explorar, representar y dar sentido a los problemas matemáticos.

Soporte en línea

La forma en que los estudiantes comparten sus ideas, soluciones, inquietudes y propuestas puede ser a través de espacios de discusión de estilo foros, chats o por medio de aplicaciones de comunicación. La interacción que los estudiantes puedan tener entre ellos o con los profesores no se limita a las reuniones sincrónicas o vía email, sino que adquieren elementos atemporales: en contexto en línea, los horarios de trabajo son únicos para cada individuo y no necesariamente universales.

Metodología y diseño

Como parte de la profundización sobre los aspectos de implementación de la bitácora digital, se llevó a cabo un taller de resolución de problemas de manera remota con cinco estudiantes de un programa de maestría en ciencias en matemática educativa, coordinado por el autor del presente trabajo y por un investigador auxiliar. El curso se gestionó a través de la plataforma de *Microsoft Teams,* durante ocho semanas. Se llevaron a cabo sesiones semanales sincrónicas de dos horas por medio de videollamadas grupales, no obstante, las interacciones entre los participantes y los coordinadores del curso no estuvieron limitadas a las sesiones sincrónicas. El trabajo de los participantes se llevó a cabo a través de dos episodios: primero, se les envió por medio de un mensaje en Teams el problema que se discutiría durante la semana y que debían registrar en su bitácora digital; posteriormente, en la sesión semanal por Zoom, presentaron avances sobre la bitácora y recibían retroalimentación tanto por parte de los coordinadores del curso como por sus compañeros.

Formato de la bitácora digital

Si bien se ha descrito el concepto de la bitácora digital como una herramienta de aprendizaje, es importante definir en términos concretos cómo luce una bitácora digital. Para este trabajo, se decidió que el libro de GeoGebra podría ser un formato adecuado, pues es un recurso que permite incluir múltiples herramientas digitales para la comunicación de ideas en un formato similar al de un libro electrónico. Se estructura a través de capítulos, cada uno compuesto por unidades llamadas actividades constituidas por: secciones de texto, vínculos o ventanas de páginas web, videos incrustados, imágenes, archivos adjuntos y, lo más importante, applets de GeoGebra funcionales (ver Figura 2).

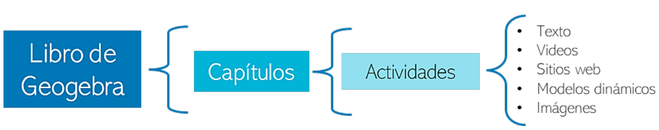


Figura 2. Estructura anidada del libro de GeoGebra

Un libro de GeoGebra no consiste en un archivo descargable, sino que se accede a él mediante un enlace permanente. Al modificar el libro, el enlace permanece invariante, de modo que es posible trabajar continuamente en él sin la necesidad de constituir versiones nuevas. Se exhortó a los participantes a estructurar los acercamientos a cada problema en 4 secciones, basadas en las fases de resolución de problemas (Santos-Trigo et al., 2016), enfatizando el uso de tecnologías digitales en cada una de las fases (Santos-Trigo, et al., 2022): comprensión del problema, es decir, concebir una idea general de lo que será la solución al problema e identificar las figuras o relaciones matemáticas que puedan ser interpretadas o reconstruidas; exploraciones basadas en el uso de herramientas de GeoGebra que lleven a la formulación de conjeturas a través de una construcción estructural; búsqueda y elaboración de argumentos que justifiquen las conjeturas halladas a través de exploraciones dinámicas; y, finalmente, una sección dedicada a una reflexión retrospectiva sobre las ideas matemáticas involucradas y extensiones al problema, con apoyo en el uso de diferentes herramientas dinámicas.

Resultados y conclusiones

Con el objetivo de ejemplificar los conceptos descritos anteriormente, se utilizará el trabajo de dos estudiantes, Iván y Paola, cuyas bitácoras pueden ser consultadas en su totalidad. No obstante, para este texto se expondrán aspectos particulares de las exploraciones de los estudiantes sobre el siguiente problema:

> *Sea ABCD un cuadrado. El segmento DE conecta un vértice del cuadrado (D) con el punto medio de uno de los lados opuestos al vértice (AB). Construir el cuadrado tomando como punto de partida el segmento DE.*

La comprensión del problema es un momento importante en la resolución de problemas, pues es donde se plantean preguntas que permitan entender la forma en que los estudiantes dan sentido al enunciado del problema, a la solución y el tipo de recursos necesarios para alcanzarla. Estas preguntas reflejan la forma en que los estudiantes organizan sus recursos para la elaboración de estrategias. La Tabla 1 resume las preguntas planteadas por los estudiantes, las cuales son reflejadas en la bitácora de cada estudiante.

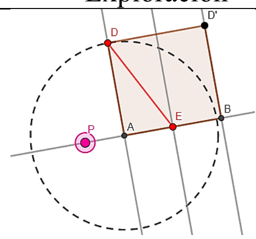
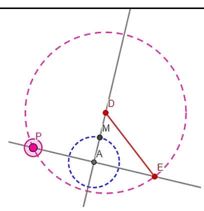
Tabla 1
Preguntas planteadas en la comprensión del problema.

Iván	Paola
• ¿Qué relación hay entre el segmento DE y el cuadrado • ¿Qué figuras *ocultas* arrojan información del problema? • ¿De qué manera *ayuda* que E sea un punto medio?	• ¿Cómo puedo usar GeoGebra para explorar el problema?

A partir de la fase de comprensión, se define tipo de exploraciones que cada estudiante realiza: Iván tiene la intención de plantear un acercamiento ordenado similar a la forma axiomática de resolver una tarea matemática, Paola prefiere familiarizarse con el problema mediante exploraciones espontáneas en GeoGebra. A continuación, se describirán brevemente las exploraciones que cada uno propone. En primera instancia se muestran dos exploraciones que Iván realizó, resumidas en la Tabla 2. Iván construyó un segmento DE inicial y trazó la recta PE, siendo P un punto libre en el plano. El resto de la construcción es tal que ABD'D es un rectángulo y E siempre es el punto medio del segmento AB. La solución se obtiene de manera visual al mover y situar P y de tal manera que el cuadrilátero ABD'D se *transforma* en un cuadrado. En términos de los elementos de GeoGebra, esto significa que el punto B sea el punto de tangencia de la recta BD' con la circunferencia con centro en A y radio AD. Una simplificación de este problema surge al notar que el problema equivale a construir un triángulo rectángulo cuyos catetos estén en razón 2:1. Adicionalmente, restringe el movimiento del punto P a una circunferencia con centro en D y radio DE. Se traza la recta PE y la perpendicular que pasa por D. El punto de intersección A será el centro de una circunferencia con radio AD. En esta exploración, la solución empírica se encuentra cuando E es un punto sobre la circunferencia con centro en A.

Tabla 2

Exploraciones de Iván al problema.

Exploración	Preguntas planteadas
 Primer intento	• ¿Qué elementos son suficientes de conocer para construir el cuadrado? • ¿Cómo la simetría del cuadrado permite encontrar la solución? • ¿Qué condiciones de P garantizan que el cuadrilátero ABD’D es un cuadrado? • ¿De qué elementos puede prescindirse para la construcción?
 Segundo intento	• ¿Cómo *atar* el movimiento del punto P a un objeto definido? • ¿Cuándo se forma un triángulo rectángulo ADE cuyos catetos están en razón 2:1?

Durante la sesión de Zoom, Iván compartió su aproximación, y notó que el punto A describe una semicircunferencia de diámetro DE. Así, Iván propuso una tercera aproximación de naturaleza analítica: construyó una semicircunferencia de diámetro DE y colocó un punto C sobre ella. A continuación, definió un punto E $\left(\frac{|AC|}{2}, |CB|\right)$ y definió el lugar geométrico del punto E a medida que C se mueve sobre la semicircunferencia (Figura 3); es decir, Iván transformó este problema geométrico en uno de naturaleza analítica al preguntarse ¿en qué posición situar el punto C tal que el triángulo ABC tenga catetos en razón 2:1? La posición solución del punto E se encuentra en el punto de intersección de su lugar geométrico con la recta $y = x$.

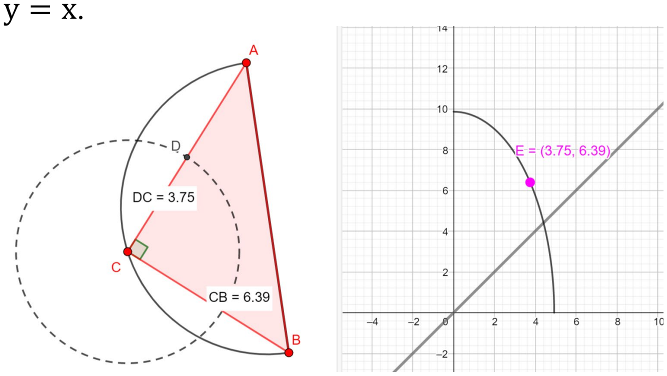
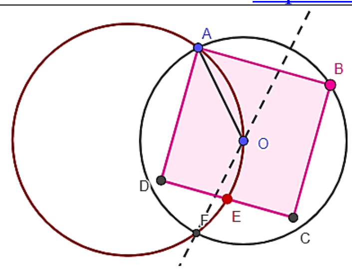
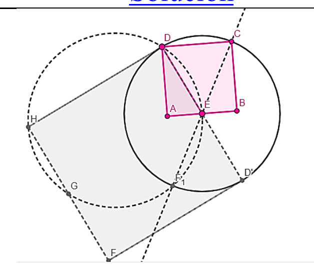


Figura 3. Exploración analítica de Iván

Por su parte, Paola pudo obtener una solución derivada de su exploración, resumidas en la Tabla 3. La exploración de Paola comenzó construyendo el segmento AO inicial, y una circunferencia con centro O que pase por A.

Tabla 3
Exploración y solución de Paola al problema.

<table>
<tr><th>Exploración</th><th>Solución</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>• ¿Cómo simplificar las condiciones del problema?
• ¿Cómo usar el lugar geométrico para estudiar el movimiento del punto medio E
• ¿Cuándo el cuadrado ABCD es tal que E coincide con el punto O?</td><td>• ¿Cómo construir la segunda circunferencia de modo que solo dependa del segmento DE inicial?</td></tr>
</table>

Sobre esta, colocó un punto B móvil y trazó el cuadrado ABCD, con lado AB. El punto medio del lado DC, E, no necesariamente coincide con O, la solución se encuentra cuando estos puntos coinciden. Para ello, se traza el lugar geométrico de E, que resulta ser una circunferencia que pasa por los puntos A, O y E. Cuando el punto E coincide con F, se obtiene una solución visual. Al situar E en esta ubicación, los puntos B y F parecen colineales con E, por lo que trazó la recta que pasa por la intersección F de ambas circunferencias y el punto O, esta recta corta a la primera circunferencia de tal forma que, al colocar B en esa intersección, se obtiene la solución empírica. Para obtener una construcción estructural (que no se *deshace*), es necesario que el lugar geométrico del punto E se construya como un objeto geométrico a partir de elementos bien definidos. En la solución, este lugar geométrico se obtiene al construir un cuadrado con lado DD', donde D' es el reflejo de D respecto a E. El punto medio G del lado opuesto, junto con D y E, son tres puntos por los que pasa la circunferencia buscada. Una vez que se obtiene esta circunferencia, el resto de la construcción es similar al de la exploración.

Conclusiones

La relevancia de considerar una bitácora digital yace en la necesidad de acortar las brechas que existen entre profesores y estudiantes en escenarios virtuales de aprendizaje, por ejemplo, la escasa interacción personal y retroalimentación instantánea en comparación con ambientes presenciales. La bitácora digital se plantea como una alternativa para organizar ambientes virtuales de aprendizaje, con miras a aprovechar los elementos tecnológicos al alcance de modo que los estudiantes puedan presentar y discutir los contenidos y problemas matemáticos de modo que exista un espacio para organizar, monitorear y controlar el trabajo de los estudiantes. El desafío yace en la importancia de que los profesores y los estudiantes conceptualicen las herramientas digitales como medios para engancharse en discusiones matemáticas donde el centro de atención es la comunicación y contraste de ideas y soluciones de problemas en ambientes virtuales, donde la interacción en persona puede no ser una posibilidad. Con el fin de contrastar el trabajo de estos dos estudiantes, conviene notar que todos los participantes resolvieron el problema de manera algebraica: Si a es la magnitud del segmento DE, entonces la longitud x del lado del cuadrado satisface la ecuación $x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2$, que al resolverse se sigue que $5x^2 = 4a^2$, o bien, $x = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$. Entonces, ¿De qué manera puede coordinarse el uso de tecnologías digitales para promover y guiar a los estudiantes en la comprensión de conceptos y en el desarrollo de competencias de resolución de problemas matemáticos en un ambiente de aprendizaje virtual? Al emplear la bitácora digital como un eje rector para la implementación de estrategias de resolución de problemas basadas en el uso de tecnologías digitales se destacan dos elementos clave:

1. El planteamiento de preguntas

Cuando un estudiante describe su proceso de razonamiento en ambientes sincrónicos o presenciales, lo hace generalmente apuntando a justificar y exponer su solución. En la medida en que esta forma dialéctica de comunicación se lleva a cabo, el profesor puede plantear preguntas para indagar en las conexiones matemáticas realizadas por el estudiante. En el trabajo de la bitácora digital, los estudiantes se ven orientados a plantear sus razonamientos de manera escrita y ordenada, dando lugar a la explicitación de preguntas que reflejan el tipo de exploraciones que deben hacerse. Estas preguntas pueden dar pauta al tipo de entendimientos que los estudiantes exhiben al momento de enfrentarse a problemas matemáticos: Iván planteó preguntas orientadas a definir las relaciones matemáticas que surgen al momento de explorar el problema, mientras que Paola demostró que su principal foco de atención fue obtener una solución estructural al problema.

2. La comprensión y exploración de conceptos de manera dinámica

Aunado a lo anterior, Iván mostró diferentes tipos de recursos matemáticos: la circunferencia como un elemento de equidistancia fue clave en todas sus exploraciones, así como la forma de reducir las condiciones necesarias para explorar un problema de manera ordenada. Adicionalmente, Iván transformó un problema de naturaleza Euclidiana (construir una figura) en un problema de análisis funcional al definir un punto dinámico en términos de magnitudes relacionadas; es decir, estudió la forma en que los segmentos DC y CB covarían para obtener un resultado empírico. Conviene destacar que por cuestiones de espacio, no se incluye la exploración completa que se llevó a cabo en la sesión de Zoom, donde Iván y sus compañeros obtuvieron una expresión algebraica asociada al lugar geométrico del punto E. Por su parte, Paola aprovechó el uso del movimiento y la simplificación de las condiciones del problema para obtener conjeturas que la condujeron a la solución del problema. El uso de circunferencias como objetos sobre los cuales colocar puntos móviles fue esencial para llevar a cabo exploraciones que le permitieron obtener un resultado satisfactorio. Obtener una construcción estructural en el trabajo de Paola significó realizar una serie de trazos que constituyan una construcción basada en propiedades geométricas. Desde el punto de vista de GeoGebra, esto significa que la construcción se mantenga, mas desde el punto de vista matemático, la tarea posterior de Paola consistió en demostrar que el lugar geométrico del punto E es una circunferencia (¿cuál es su centro? ¿cuál es su radio?) y, además, ¿qué justifica que la intersección de la recta FO y la circunferencia con centro en O y radio AO es el vértice del cuadrado que satisface las condiciones?

Es decir, a través del planteamiento de preguntas y del uso de elementos dinámicos de tecnologías como GeoGebra, se emplea el trabajo de una bitácora digital como un punto de partida hacia discusiones orientadas a estudiar la forma en que conceptos matemáticos entran en juego en resolver problemas que, de hacerlo en ambientes estáticos, no sería posible.

Referencias y bibliografía

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, J. Lu, T. K. F. Chiu, & B. Fox (Eds.), *Mobile Learning Design: Theories and Application* (pp. 3–25). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-0027-0_1

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM - Mathematics Education*, *0123456789*. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4

Johns, C., & Mills, M. (2021). Online Mathematics Tutoring During the COVID-19 Pandemic: Recommendations for Best Practices. *PRIMUS*, *31*(1), 99–117. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1818336

Laborde, C. (2002). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-31. Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283–317.

Martin, F., Sun, T., & Westine, C. D. (2020). A systematic review of research on online teaching and learning from 2009 to 2018. *Computers and Education*, *159*(April), https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.104009

Mullen, C.; Pettigrew, J.; Cronin, A.; Rylands, L. & Shearman, D. (2021). The rapid move to online mathematics support: changes in pedagogy and social interaction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(1), 64-91. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1962555

Santos-Trigo, M., & Camacho, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *Mathematics Enthusiast*, *10*, 279–302.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 182–201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies. *Int. J. Learning Technology*, *17*(1), 27-52. https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686

Schoenfeld, A. (2011). How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications. https://doi.org/10.4324/9780203843000

Trenholm, S., Alcock, L., & Robinson, C. (2015). An investigation of assessment and feedback practices in fully asynchronous online undergraduate mathematics courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1197–1221. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036946