



Examinando el proceso de abstracción sobre el concepto de combinación lineal, bajo el modelo RBC

Sandra Milena **Rojas-Tolosa**

Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia

srojasto@poligran.edu.co

William Alfredo **Jiménez** Gómez

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

wjimenez@pedagogica.edu.co

Resumen

Las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal se aluden a su alto nivel formal y abstracto. Reconociendo la importancia del proceso de abstracción y su papel en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo del pensamiento matemático, surge el interés por analizar este proceso en la construcción de conocimientos del álgebra lineal, en particular del concepto de combinación lineal a través de la interacción con un recurso de GeoGebra. A través de las tres acciones epistémicas de reconocer, construir con y construir, que configuran el modelo RBC, se describen las construcciones de conocimiento abstracto, evidenciadas en el trabajo de los estudiantes al abordar una situación de combinación de colores diseñada en un recurso digital. El carácter dinámico e interactivo del recurso permite generar ejemplos aleatorios posibilita identificar regularidades y relaciones entre diferentes representaciones para establecer conexiones con conocimientos previos y verificar conjeturas.

Palabras clave: Combinación lineal; abstracción; modelo RGB; GeoGebra.

Introducción

El álgebra lineal es uno de los cursos presentes en los planes de estudio de carreras como ingeniería, economía, estadística, matemáticas y física. Su importancia radica en ser una de las áreas con mayor aplicabilidad en diversas situaciones problema de la vida real y de las ciencias

que pueden ser abordados desde los conceptos que la componen (Mutambara, Bansilal, 2018; Álvarez-Macea, Costa, 2019). Por lo general, un curso de álgebra lineal aborda temáticas como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, vectores, espacios vectoriales, transformaciones lineales y, valores y vectores propios, de las cuales, por lo general, los estudiantes de educación superior sólo han tenido un acercamiento previo con la primera temática.

Para los docentes es evidente que este curso constituye un gran desafío para los estudiantes dado su carácter formal y abstracto (Dorier, 2000; Penagos, Mariño, & Hernández, 2017; Trigueros, 2018; Mutambara & Bansilal, 2018), considerándola como tediosa, de gran complejidad (Álvarez-Macea, Costa, 2019), generando diversas dificultades y errores en el proceso de aprendizaje y por tal razón los estudiantes suelen reducir esta área al campo de lo procedimental (Álvarez-Macea, Costa, 2019), en especial cuando se empieza a abordar conceptos de un nivel superior como lo es de espacio vectorial y transformaciones lineales. El estudio de las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra lineal ha sido de gran interés para la comunidad de educadores matemáticos (Oktaç y Trigueros, 2010; Mutambara & Bansilal, 2018).

Mutambara y Bansilal (2018) a partir de la revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal encuentra que las principales dificultades en el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal radican en: la identificación y construcción de casos concretos vs genéricos; el desarrollo de pruebas formales; dificultad para reconocer lo que se debe demostrar para determinados axiomas; falta de conexión con los conocimientos previos; comprensión y uso de lenguaje y notación matemática; falta de comprensión y producción de contraejemplos para construir justificaciones; falta de habilidad para producir ejemplos correctos; dificultades en la aplicación de algoritmos; interpretación de los resultados en un contexto dado; problemas relacionados con la comprensión de los conceptos subyacentes de las operaciones binarias y conjuntos.

Oktaç y Trigueros (2010) y Penagos, Mariño, & Hernández (2017) afirman que existe la necesidad de realizar investigaciones que no sólo se queden en el análisis de las dificultades, sino en la formulación de propuestas que ayuden a atenderlas. Este es el propósito de nuestro trabajo, diseñar una propuesta de aprendizaje mediado por un recurso de GeoGebra para la comprensión del concepto de combinación lineal y el desarrollo del proceso de abstracción, en un contexto diferente al geométrico que es el que se suele emplear para su introducción. El trabajo se centra en el tema de combinación lineal dado que este es uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal, al estar estrechamente relacionado con conceptos como dependencia e independencia lineal y espacio generado (Harel, 2018; Mutambara & Bansilal, 2018).

La capacidad lógico-interpretativa y abstractiva, es un elemento clave en el desarrollo de la inteligencia matemática y contribuye positivamente al entendimiento de conceptos de otras áreas, necesarios en la resolución de un problema que implique procesos como modelación, simulación, validación, entre otros claves en el quehacer un profesional en ingeniería (Edgar & Antonio, 2014; Jaramillo Naranjo & Puga Peña, 2016). El desarrollo de esta capacidad podría ser el único y más importante objetivo en la enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado (Penagos, Mariño, & Hernández, 2017), es por tal razón que han surgido marcos teóricos y metodológicos para reconocer los procesos de construcción de conocimiento matemático bajo el análisis del nivel de abstracción del estudiante.

Modelo RBC

De acuerdo con Hazzan y Zazkis (2005), no existe un consenso frente a un significado único, pero si es posible examinarlo desde diversas perspectivas. En la presente propuesta se usa el modelo abstracción en contexto (AiC) al ser un marco teórico que integra el enfoque cognitivo y situado con elementos teóricos de la actividad y el constructivismo (Dreyfus y Kidron, 2014), y al ser un modelo fácilmente replicable y adaptable en diversos contextos de construcción de conocimiento abstracto, en este caso, el álgebra lineal. Es un marco teórico metodológico para un análisis cognitivo del proceso de abstracción de los estudiantes al construir conocimiento matemático. Este modelo se fundamenta en tres conceptos: i) la matematización matemática (teoría propuesta por Freudental, 1999), entendida como “reorganización de construcciones matemáticas previas dentro de las matemáticas y por medios matemáticos, mediante los cuales los estudiantes construyen una nueva construcción abstracta” (Dreyfus, 2015, p.2); ii) teoría de la actividad (propuesta por Davyvod, 1990), en la que se plantea que las acciones ocurren en un contexto y sólo tienen sentido dentro de la actividad en la que tienen lugar, tiene en cuenta tanto procesos cognitivos como el contexto social y curricular determinado, la abstracción parte de una manera simple, no desarrollada y vaga; ii) el contexto, el cual integra cualquier pieza del entorno presente y pasado que pueda influir en los procesos individuales de construcción del conocimiento, dentro de ellos se encuentran aspectos históricos (experiencias previas en el aprendizaje de las matemáticas), aprendizaje (factores curriculares, normas socio-matemáticas), social (compañeros, familia, profesor), las tareas (Dreyfus y Kidron, 2014).

Los procesos de construcción de conocimiento bajo este modelo se observan a través de tres acciones epistémicas observables (Dreyfus, 2015): *reconocer*, el alumno se da cuenta de que un determinado constructo de conocimiento es relevante en la situación que se presenta; *construir-con*, combinación de los constructos reconocidos con el fin de lograr un objetivo localizado y actualización de una estrategia, una justificación o solución de un problema; *construir*, acción central de la abstracción: Ensamblar e integrar construcciones anteriores mediante la matematización vertical para producir una nueva construcción, usa o expresa una nueva construcción. Una ampliación de este modelo es el RBC+C que involucra el proceso de consolidación, cuyos criterios de inmediatez, autoevidencia, confianza, flexibilidad y conciencia como indicadores de que un conocimiento se ha consolidado, para lo que se requiere de la toma de datos de diferentes actividades, surge después de la construcción y es empleado en la construcción de otro nuevo conocimiento (Hazzan y Zazkis, 2005).

Método

En el marco de interés de la propuesta, se desarrolló una investigación cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). En primer lugar, consulta de fuentes primarias y secundarias sobre las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra lineal y el proceso de abstracción para identificar relaciones entre estos dos aspectos, así como identificar los conceptos clave que es necesario centrar la atención por ser claves para la comprensión de otros, encontrándose que el concepto de combinación lineal es uno de ellos y sobre los cuales poco que han desarrollado propuestas didácticas para su abordaje. Los resultados de esta fase conllevaron a la siguiente constituida por el diseño de un recurso educativo digital

interactivo en el software matemático GeoGebra, en el que se encuentra presente este concepto en un contexto de combinación de colores en el modelo RGB, en el que los colores se consiguen mezclando diferentes proporciones de rojo, verde y azul y se identifica cada color resultante con un vector de $\mathbb{R}^3$, donde cada componente representa la intensidad de los colores rojo (R), verde (G) y azul (B), cuyos valores varían en una escala de 0 a 255. El uso del recurso estuvo orientado por una serie de tareas que conllevan al estudiante a explicar y validar sus descubrimientos. En una tercera fase, recoger y analizar las respuestas de los estudiantes a la luz del proceso de abstracción teniendo en cuenta la propuesta teórica y metodológica de Dreyfus.

Esta propuesta se desarrolló con estudiantes de programas de ingeniería de software, ingeniería industrial y tecnología en logística de la institución universitaria Politécnico Grancolombiano (Colombia), de la modalidad virtual, que cursaban la asignatura Álgebra Lineal. Cabe mencionar que los cursos de la modalidad virtual cuentan con una estructura de desarrollo de ocho 8 semanas compuesto por 150 estudiantes y con estrategia de trabajo independiente y colaborativo. Dentro del módulo, los estudiantes cuentan con foros en los que se pueden registrar sus inquietudes, propuesta de soluciones a ejercicios o problemas propuestos por el tutor, así como dos espacios de encuentro sincrónico semanales con el docente para aclarar inquietudes sobre lo estudiado o profundizar en las temáticas.

Una de las actividades evaluativas es un trabajo colaborativo para el cual se conforman aleatoriamente grupos de 5 estudiantes. La actividad se desarrolla durante las semanas 3, 4 y 5, a través de un foro de debate. El tutor plantea una actividad en la que los estudiantes aplican lo aprendido durante las primeras semanas del módulo. Toda comunicación y aportes se debe registrar directamente en el foro creado para cada grupo. Los encuentros sincrónicos de estas tres semanas tienen como propósito realimentar las soluciones propuestas por los estudiantes, previa revisión de los foros por parte del tutor así, como dar orientaciones para la actividad a desarrollar en la siguiente semana. La muestra fue seleccionada por conveniencia teniendo como indicador el número de publicaciones registradas en los foros durante las tres semanas. De los 30 grupos formados en el curso, se revisaron 15, siendo los grupos que tuvieron un número mayor a 20 participaciones. Los instrumentos de recolección de información fue la observación de la respuesta dada por los estudiantes a las preguntas que involucran el concepto de combinación lineal, cuyas variables de análisis fueron las tres acciones epistémicas del modelo RBC: reconocer, construir-con y construir, teniendo en cuenta que es una propuesta teórica y metodológica para describir y proporcionar una visión de los procesos de abstracción (Dreyfus, 2015).

Resultados

Las participaciones en el foro permiten evidenciar las tres acciones epistémicas observables relacionadas con el proceso de abstracción, iniciando en la acción de reconocimiento, a través de la Construcción-con y terminado en construcción, el siguiente esquema muestra este proceso con algunos ejemplos tomado de los foros y la producción de los estudiantes, como ejemplificación.

Tabla 1

Acción epistémica observable: reconocer.

Acción epistémica observable	Reconocer	Concepto o proceso	Combinación lineal y sistemas de ecuaciones.
Evidencia			
Respuestas a la pregunta: ¿Cuál es el vector que representa el color amarillo?			
Hola gemian, debemos definir bien este punto ya que hay varias combinaciones de los vectores que me arroja como resultado el color amarillo, como la que relaciono a continuación: en el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Use al menos 4 decimales $c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $0 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$ $0 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$ $\text{rojo} + \text{verde} + \text{azul} = \text{amarillo}$ Use al menos 4 decimales $c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.756 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 191.25 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\text{rojo} + 0.756 \text{verde} = \text{amarillo}$ Factor = $\begin{pmatrix} 255 \\ 191 \\ 0 \end{pmatrix}$ Respuesta a la pregunta: Seleccione un vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ cuyas componentes sean valores numéricos entre 0 y 255 e identifique el color correspondiente en la sección Configurar Colores. ¿Es posible obtener el color seleccionado como resultado de mezclar tonalidades de los colores correspondientes a los vectores $\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$? COMBINACION LINEAL. Una combinación lineal es un conjunto de vectores y escalares, donde se multiplica vectores por escalares para obtener otro vector. Para determinar si un conjunto de escalares es combinación lineal de los vectores, el sistema de ecuaciones tiene que tener una o múltiples solución; de lo contrario, no sería una combinación lineal. Hola compañeros Estoy de acuerdo con el método de formar el sistema de ecuaciones y tratar de ver si tiene solución ya sea una o que hagan infinitas para verificar la combinación lineal, sin embargo, quiero aportar que el conjunto de escalares no es el que será combinación lineal sino lo que hay que tratar de encontrar es un vector que sea la combinación lineal con la ayuda de esos ciertos escalares. ← Respuesta			

Al responder la primera pregunta, los estudiantes reconocen implícitamente la necesidad de verificar por qué se obtiene un color amarillo para diferentes vectores, de lo cual se dan cuenta que son diferentes tonalidades. Posteriormente, los estudiantes encuentran sentido a los diferentes resultados obtenidos al responder la pregunta ¿Qué cambios en el color produce la multiplicación de un vector por un escalar?

El cambio que produce un vector por un escalar hace referencia a la tonalidad que toma al cambiar el valor que se asigna. Como se muestra en la imagen 1 es la tonalidad natural del vector, en este caso el verde; si se cambia el valor por un escalar de decimales 0,756 como se ve en la imagen 2 el tono del verde se oscurece. Por eso se concluye que entre más cerca del 1 es más vivo el color; y entre más cerca del 0 su tonalidad oscurece.

Al responder la segunda pregunta los estudiantes reconocen que deben emplear el concepto de combinación lineal; sin embargo, al momento de definirlo con sus propias palabras sólo reconoce la multiplicación escalar dando cuenta de una de una de las dificultades mencionadas por Mutambara y Bansilal (2018) (problemas relacionados con la comprensión de los conceptos subyacentes de las operaciones binarias y conjuntos). Por otra parte, se reconoce el proceso matemático que se debe emplear para verificar si un vector se puede expresar como combinación lineal de un conjunto de vectores dados.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Tabla 2. Acción epistémica observable: construir-con

<i>ión epistémica observable</i>	<i>Construir-con</i>	<i>Concepto o proceso</i>	<i>Construcción de vectores particulares usado el concreto y la combinación lineal.</i>
----------------------------------	----------------------	---------------------------	---

Evidencia

Junto a la segunda pregunta de la acción anterior, se solicitó a los estudiantes describir el proceso matemático que se usa para obtener cualquier color a partir de los vectores dados y luego, verificar por medio de un proceso matemático, los resultados obtenidos en la exploración con el recurso. Algunas respuestas fueron:

Al multiplicar estos valores en forma escalar por los vectores mencionados en el enunciado, y posteriormente sumar entre sí dichos resultados obtenemos como resultado: el vector inicial $\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Use al menos 4 decimales

$$c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 255c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255c_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255c_1 \\ 255c_2 \\ 255c_3 \end{pmatrix}$

Entonces tenemos que:

$$1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, debemos encontrar un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 111, un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 43.5 y un escalar que multiplicado por 255 nos dé como resultado 98:

$C_1 \times 255 = 111$	$C_2 \times 255 = 43.5$	$C_3 \times 255 = 98$
$C_1 = \frac{255}{111}$	$C_2 = \frac{255}{43.5}$	$C_3 = \frac{255}{98}$
$C_1 = 0.43$	$C_2 = 0.17$	$C_3 = 0.38$

En conclusión, si existen valores reales para C_1, C_2, C_3 que cumplen las condiciones dichas.

Pero al multiplicarlo por un escalar entre cero y uno esto me disminuye el valor del vector inicial de 255 y me provoca un cambio en los tonos de los colores primarios final del vector lo que provoca un cambio en la pigmentación individual de cada uno de los vectores originales y así mismo en el resultado del color final final.

Los estudiantes usan el concepto de combinación lineal para solucionar el problema y generar colores y vectores particulares. Obtienen un sistema de ecuaciones lineales del desarrollo de la combinación lineal y con su solución encuentran los valores escalares, que posteriormente verifican con el recurso.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Solución

para dar inicio a la solución del punto No 4, lo que puedo percibir es que el proceso matemático que se usa es la adición. Porque dependiendo de la cantidad de color que tengamos de cada uno de nuestros colores primario, Rojo, Verde o azul el resultado del color final variara y así obtendremos tonalidades de colores diferentes.

Este comportamiento lo podemos apreciar en el ejercicio de multiplicar los vectores de cada color por un escalar entre 0 y 1 con cifras de cuatro decimales.

Cuando iniciamos el ejercicio podemos apreciar que el tono de cada uno de los cuadro de color que me representa el vector es negro (esto porque todo numero por cero es igual a cero)

Use al menos 4 decimales

$$c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 255c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255c_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255c_1 \\ 255c_2 \\ 255c_3 \end{pmatrix}$

Entonces tenemos que:

$$1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tabla 3. Acción epistémica observable: construir

<i>Acción epistémica observable</i>	<i>Construir</i>	<i>Concepto o proceso</i>	<i>Conjunto generador</i>
<i>Evidencia</i>			
A partir de las actividades desarrolladas en las acciones anteriores, se encuentran algunas evidencias de la construcción del concepto de combinación lineal al integrarlo en la construcción de otro concepto de orden superior. Para obtener cualquier color se deben multiplicar los escalares (C_1, C_2 y C_3) por los vectores básicos y luego sumar los resultados formando un vector final que será el que da el color final, de la siguiente forma: $c_1 \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} C_1(255) \\ C_1(0) \\ C_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2(0) \\ C_2(255) \\ C_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_3(0) \\ C_3(0) \\ C_3(255) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(255) + C_2(0) + C_3(0) \\ C_1(0) + C_2(255) + C_3(0) \\ C_1(0) + C_2(0) + C_3(255) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} C_1(255) \\ C_2(255) \\ C_3(255) \end{pmatrix}$ El conjunto de números que deben tomar C_1, C_2 y C_3, debe estar dado entre 0 y 1 para que la ecuación dada se cumpla, debido a que $1 \cdot 255 = 255$, y 255 es el máximo valor que pueden tener a, b y c.			

Los estudiantes reconocen un conjunto generador y lo usan para general cualquier vector del conjunto empleando el proceso de combinación lineal y caracterizando los valores escalares en el contexto concreto, integrando los resultados obtenidos en las dos acciones anteriores.

Fuente: elaboración propia. 2022.

Discusión y Conclusiones

De acuerdo con Hershkowitz et al. (2007b), Dreyfus (2015) y Kidron et al. (2014), la abstracción suele darse en grupos de estudiantes que interactúan entre sí, al tenerse en cuenta las construcciones individuales y los conocimientos compartidos para construir conocimientos base que les permite avanzar. Este aspecto se vio parcialmente reflejado en el trabajo de los grupos puesto que en la modalidad virtual persiste la pasividad, poca participación e interacción de los estudiantes, lo cual se refleja en los pocos aportes frente a la revisión a los aportes de compañeros y comparación frente a los propios. El avance se dio en los encuentros sincrónicos, en los que el papel del tutor es de gran relevancia al plantear preguntas intercaladas y orientadoras que le permitía reconocer en profundidad lo que los estudiantes querían expresar, identificar los errores y las interpretaciones incorrectas que se presentaban y así avanzar en la construcción de su conocimiento.

Aunque el propósito del presente trabajo era dar cuenta de las acciones epistémicas evidenciadas en los aportes de los estudiantes, de los resultados obtenidos y de la experiencias vivida durante el desarrollo de la propuesta de trabajo colaborativo, tanto en el foro como en los encuentros sincrónicos se alcanzó a reconocer lo indicado por Dreyfus y Kidron (2014) al establecer que factores contextuales como la tarea, la historia personal de los estudiantes, el software de computadora, el maestro y metas de aprendizaje influyen en la construcción del conocimiento.

En el caso de la tarea, generó motivación hacia la exploración y describir lo observado, a lo cual no suelen estar acostumbrados los estudiantes y suele ser difícil, lo que se relaciona con su

historia personal frente a sus experiencias previas con las matemáticas (Kidron et al., 2014). En cuanto al recurso de GeoGebra, la interacción con él, al permitir variar cantidades y observar los cambios de color y sus mezclas, permitió dar un sentido a multiplicación por escalar y la combinación lineal en el proceso de mezcla de colores y hacer inicialmente una verificación con el recurso y luego validarla matemáticamente. Respecto al maestro, se puede ver en lo descrito en el párrafo anterior.

De acuerdo con lo anterior y que este documento sólo se analizó la actividad de los estudiantes en una actividad asincrónica, se abre la posibilidad a un campo no aún explorado frente al análisis de la construcción del conocimiento matemático bajo el modelo de abstracción contemplando tanto los factores contextuales descritos por Kidron et al. (2014) como los espacios de interacción sincrónica y asincrónica en una modalidad virtual.

Referencias bibliográficas

- Álvarez-Macea, F. Costa, V.A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10 (2), 65-78
- Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers (pp. 6-11).
- Dreyfus, T. (2015). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. In: Cho S. (eds) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_7
- Dreyfus T., Kidron I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbabs A., Prediger S. (eds) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_6
- Edgar, S. M., & Antonio, P. J. (2014). Lógica y abstracción en la formación de ingenieros: una relación necesaria. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 15(2), 299-310. [https://doi.org/10.1016/s1405-7743\(14\)72218-8](https://doi.org/10.1016/s1405-7743(14)72218-8)
- Harel G. (2018) The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual Need and Epistemological Justification and Their Constituents. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_1
- Hazzan, O., & Zazkis, R. (2005). Reducing Abstraction: The Case of School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 101-119. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-3335-x>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación. México: McGraw-Hill.
- Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2007b). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 41-68. <https://doi.org/10.1007/bf03217455>
- Jaramillo Naranjo, L. M., & Puga Peña, L. A. (2016). El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophía*, 2(21), 31. <https://doi.org/10.17163/soph.n21.2016.01>
- Kidron I., Artigue M., Bosch M., Dreyfus T., Haspekian M. (2014). Context, Milieu, and Media- Milieus Dialectic: A Case Study on Networking of AiC, TDS, and ATD. In: Bikner- Ahsbabs A., Prediger S. (eds) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*.

- Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_10
- Mutambara L.H. & Bansilal S. (2018). Dealing with the Abstraction of Vector Space Concepts. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_7
- Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 373-385.
- Penagos, M., Mariño, L. & Hernández, R. (2017). Mejoramiento de la competencia escritural en la educación básica primaria a través de la mediación instruccional y pedagógica del video. *Perspectivas*, 2(1). 105-116.
- Trigueros, M. (2018) Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_2