



Caracterización del pensamiento geométrico espacial a partir de la resolución de problemas de empaçado

Angel Leandro **Romero** Santiago

Departamento de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño
Colombia

anromero57@uan.edu.co

Osvaldo Jesús **Rojas** Velásquez

Departamento de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño
Colombia

orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Enseñar geometría a partir de la resolución de problemas evoca un aprendizaje significativo y por ende se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El limitado manejo del componente geométrico (transformaciones geométricas) y de las habilidades de visualización e imaginación limitan la resolución de problemas de empaquetado en la geometría espacial. Esta investigación se dirige a fortalecer la resolución de problemas de empaquetado desde el manejo de las herramientas TIC y del material manipulativo para desarrollar el pensamiento geométrico en los estudiantes de la educación primaria. La investigación asume un enfoque cualitativo con diseño de investigación acción. La implementación de las actividades propicia el fortalecimiento en el manejo de herramientas tecnológicas y material manipulativo, la motivación e interés hacia el estudio de la geometría y un robusto pensamiento espacial en el contexto de la resolución de problemas de empaquetado.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria; Resolución de problemas; Empaquetado; Transformaciones geométricas; Geometría espacial; TIC, Material manipulativo; Colombia.

Introducción

Desde sus inicios la matemática ha sido concebida como una herramienta para dilucidar las relaciones cuantitativas que hay en nuestro entorno educativo. Además, ha estado articulada

alrededor de la idea de un pensamiento geométrico y principalmente en el pensamiento espacial. Sinclair y Bruce (2015) destacan la importancia de enseñar la geometría desde la escuela primaria, puesto que allí se evidencia de mejor manera la construcción del concepto basado en el dibujo y los movimientos, desde el papel de la tecnología en los procesos geométricos y la importancia de la geometría transformacional en el plan de estudios como eje transversal de la implementación geométrica en la escuela primaria.

Es importante destacar en el contexto de la enseñanza aprendizaje de la matemática, el papel crucial que juegan las transformaciones en el campo de la geometría espacial y su relación con algunas de los cuerpos geométricos que allí se presentan. El desarrollo de la presente investigación busca crear en los estudiantes un conocimiento robusto para el dominio teórico-práctico del proceso de empaquetamiento.

Desde la postura de los congresos y reuniones, en el ICME se resalta la importancia del papel que juega las transformaciones geométricas en la educación y principalmente en la educación primaria. En el ICME 13 y 14, en el Topic Study Group (TSG) 12 y 8 respectivamente, se precisa la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, el cual genera una serie de subtemas, donde se observa el papel de las transformaciones geométricas en el aprendizaje y enseñanza de la geometría (subtema 8 en ambos documentos).

El CERME desde su postura europea, abre un espacio para el impacto en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela. En los últimos años en su working group teams (TWG) 4, se discuten sobre: el uso de habilidades espaciales en niños para resolver problema geométrico, evolución de la comprensión de las formas geométricas en niños y los entornos tecnológicos para la geometría en los primeros años de la educación formal.

Algunos encuentros colombianos como el ECME y EGA, resaltan el papel de la geometría en el desarrollo de habilidades matemáticas en los niños y niñas. Dentro de estos grupos investigativos se destaca la importancia de la enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas, el uso de herramientas tecnológicas y su relación con el uso de material manipulativos en el desarrollo del pensamiento espacial.

Por otra parte, dentro del estado de arte se presenta a Chase (1908) y Williford (1972), los cuales enfatizan sobre la importancia que ha tomado la enseñanza de la geometría en los últimos años en la escuela primaria. Estos autores destacan el aporte indiscutible que tiene para el desarrollo de la matemática concebir un proceso basado en la capacidad de visualización, abstracción, creación y desarrollo del pensamiento matemático de manera formal dentro de una etapa inicial.

Por último, la experiencia docente de varios especialistas destaca el papel de la geometría en el contexto de la escuela primaria, la cual, a través del tiempo ha sido relegada como un “complemento” a los procesos de formación matemático que se enseñan al finalizar cada periodo “en una semana” o al finalizar el año. Esta forma de concebir la geometría conlleva a no desarrollar las habilidades propuestas para la temática por temas de tiempo y otras actividades que afectan los espacios establecidos para tal fin dentro de la institución educativa.

Se presenta dentro de la investigación como objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en escuela primaria. Se deriva como objetivo general favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para propiciar un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza.

Marco teórico

Como antecedentes bibliográficos, se toman todas aquellas fuentes de consulta que para esta investigación han aportado a la temática abordada, hoy en día la educación tradicional, las TIC, el material manipulativo y la resolución de problemas han creado entornos de aprendizaje más llamativos, enriquecedores y actualizados. Desde estos entornos educativos se busca generar en el estudiante una mayor motivación e interés por la adquisición de nuevos conocimientos desde un campo más contextualizado para el estudiante. Es por ello, que la presente investigación se enmarca en la resolución de problemas retadores, el papel de la visualización matemática y su significado, el uso de materiales didácticos y tecnológicos en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial desde el empaquetamiento geométrico.

Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

El estudio formal de la matemática se inicia desde los primeros años de la educación primaria, en el cual juega un papel importante el pensamiento geométrico. Especialistas en tema han abordado la solución de problemas dentro de sus investigaciones como una estrategia didáctica y pedagógica para fortalecer el pensamiento matemático (Pólya, 1965; Fridman, 1972; Krulik Y Rudnik, 1980; Martínez, 1981; Schoenfeld, 1985; Mayer, 1986; Sánchez, 1994; Garret, 1995; Rizo 1996; Álvarez, 1996; Kilpatrick, 1998; Sriraman, 2010 y Bong y Leal 2015).

La definición o interpretación de problema no es tan trivial como se cree, sin embargo, se tiene el aporte de varios especialistas e investigadores. Dichas definiciones se canalizan de forma general como una situación, la cual presenta una o varias dificultades que no muestran solución directa o inmediata como es planteado por Falk (2001) cuando se habla de problema retador.

Es indispensable trabajar de forma continua con los estudiantes la resolución de problemas retadores y no ejercicios que ameritan seguir pasos rutinarios. La resolución de dichos problemas conduce a los estudiantes a buscar información, reflexionar, conjeturar y probar dentro de la integración de conceptos, procedimientos y actitudes.

Fundamentación de la visualización matemática

Dentro del proceso de formación teórica, se ha centrado el interés en la visualización enfocada a la semiótica de los cuerpos, en particular de las figuras geométricas espaciales, puesto que son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado el aprendizaje de la geometría desde la primaria hasta la educación profesional.

La definición de visualización matemática ha sido propuesta por varios investigadores, los cuales aportan directamente a la construcción de los procesos de enseñanza aprendizaje de la

matemática (Presmeg, 1986; Zimmermann y Cunningham, 1991; Guzmán, 1996; Duval, 1999; Arcavi, 2003; entre otros). Estos autores han investigado sobre la importancia de la visualización en la educación matemática y como esta puede favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula de matemáticas.

El trabajo continuo desde la visualización en geometría, fortalece los procesos mentales de los estudiantes desde su reconocimiento inmediato al igual que el uso de sus conocimientos previos. El buen uso de la visualización matemática conduce a los estudiantes a identificar y construir; conjeturas, procesos, conceptos y actitudes para los procesos de enseñanza aprendizaje.

Fundamentación del pensamiento espacial

La formación continua en los distintos niveles educativos debe enfrentar el uso de las tecnologías, materiales manipulativos, entre otros; como herramientas pedagógicas en el marco del desarrollo del pensamiento espacial, con el fin de desarrollar estrategias que le sirvan para enfrentar y solucionar las necesidades de la sociedad presente y futura en el contexto que se desenvuelven los estudiantes en su vida diaria.

El reconocimiento, manipulación y dominio conceptual de los cuerpos geométricos en el espacio, requiere del estudio de conceptos de propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos relacionados. También, propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos de los propios cuerpos y las coordinaciones entre ellos.

Las posturas planteadas anteriormente se basan en Flores (1991) y Arboleda (2011), quienes, por otra parte, ven el pensamiento geométrico espacial como un pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional, como un reflejo inmediato del contexto. Lo cual, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y su desenvolvimiento en el contexto inmediato.

Fundamentación de los problemas de empaquetado

Desde la postura de Smalley (2018), los problemas planteados de empaquetado se perciben como una clase de problemas de optimización en matemáticas que implican intentar empaquetar objetos en contenedores, desde una visión geométrica determinada. El objetivo es empaquetar un solo contenedor, o varios según sea el caso, lo más densamente posible o empaquetar todos los objetos usando la menor cantidad de contenedores posible.

Para la concepción de empaquetado es importante tener presentes algunos elementos conceptuales que contribuyen al desarrollo del pensamiento geométrico desde dicha perspectiva geométrica de empaquetamiento:

- Desde la postura de Salguero y Gutiérrez (2019), el proceso que permite almacenar o disponer un producto para su traslado se define como empaquetado. Se trata de la acción que lleva a guardar o a recubrir el producto en cuestión, de manera tal que quede preparado para el transporte, organización, guardado en un contenedor.

- El “embalaje terciario” (envase, empaque y embalaje) cuya única función es la de almacenar, proteger, conservar y transportar varias unidades “cuerpos” del mismo producto en grandes cantidades.
- La optimización del empaquetado, hace referencia al mayor ajuste de la necesidad del empaquete desde el uso de espacios, materiales entre otros.

De lo anterior, se establece una estructura conceptual que orienta el empaquetamiento contribuyendo al desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

Metodología

En la Institución Educativa Departamental Bicentenario de Funza se presentan dificultades en la enseñanza aprendizaje de procesos de empaquetamiento. Estas dificultades limitan un desarrollo vigoroso del pensamiento geométrico por parte de los estudiantes. Con el fin de alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación se presenta el siguiente diseño de la metodológico:

Se asume un paradigma cualitativo, con un enfoque netamente cualitativo. La presente investigación enfoca sus esfuerzos en las acciones y el motivo de las mismas, buscando siempre explicar lo captado en el contexto del estudiante.

Por otra parte, se asume un diseño de investigación acción, dicho diseño propicia contextos donde se permite explorar, buscar, identificar y conjeturar en el campo de la geometría. Este diseño permite contribuir al favorecimiento del proceso de enseñanza aprendizaje de los procesos de empaquetamiento en el espacio.

La población tomada para la presente investigación se enmarca en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Departamental Bicentenario del municipio de Funza. La muestra de la investigación está conformada por 35 estudiantes de grado quinientos uno pertenecientes a la sede San Andrés.

Actividad diagnóstica

A continuación, se propone la siguiente actividad inicial que lleva como nombre “vamos a empaquetar los bloques” y tiene como objetivo identificar las nociones de empaquetamiento, optimización y el papel de las transformaciones geométricas desde la visualización de su contexto y el material manipulativo.

La actividad plantea la siguiente situación problema: un diseñador de interiores quiere empaquetar los bloques que necesita en un contenedor con el fin de reducir los gastos para su contratación. Para realizar dicho empaquetado debe tener en cuenta algunas condiciones tales como:

- a. Todos los bloques son iguales.
- b. Los bloques tienen las siguientes medidas 12cm x 16cm x 10cm.
- c. El contenedor debe tener cuatro pisos de bloques.
- d. El contenedor posee unas dimensiones de 48cm x 40cm en su base.

- e. Dado el primer bloque (bloque inicial), para construir cada piso solo se permite rotar o trasladar el bloque.
- f. Cada piso posee un bloque inicial diferente, como se indica (ver Figura 1).

1° PISO	2° PISO	3° PISO	4° PISO

Figura 1. Pisos iniciales de empaquetamiento.

Para la solución de la situación planteada se plantean algunas preguntas orientadoras por parte del docente, las cuales conducen a los estudiantes por un camino correcto hacia la solución de unos problemas planteados (ver Figura 2).

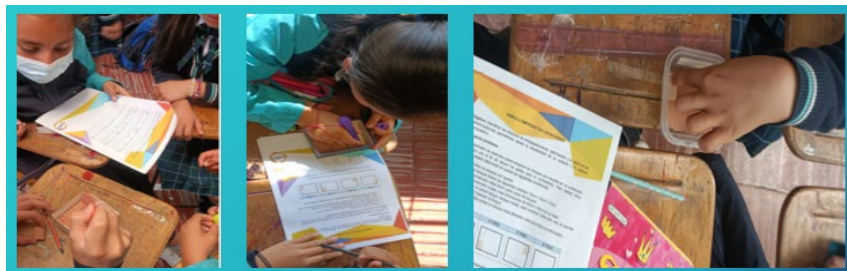


Figura 2. Trabajo de la situación problema.

Análisis de resultados

Se realiza un análisis de la implementación de la actividad con el fin de enfatizar en las diferentes soluciones que presentan los estudiantes en los problemas propuestos, estos problemas tienen como objetivo robustecer la enseñanza aprendizaje de la geometría a través de los problemas de empaçado. La actividad propuesta cuenta con evidencias fotográficas, bitácora y videos con el fin de constatar las ideas, desempeños y conclusiones a las que llegan de manera individual los estudiantes.

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Al iniciar la implementación de la actividad, los estudiantes muestran gran inquietud y curiosidad por el ejercicio a desarrollar por cada uno de ellos. Por otra parte, se indica la metodología de trabajo y las condiciones de clase.

Se entrega la actividad inicial y se indica que se debe realizar la lectura del título y el objetivo de la actividad e identificar los problemas propuestos en la guía entregada. Es importante destacar que los estudiantes al ver la guía con una sonrisa en su rostro indican que: “... vamos a trabajar en geometría, ¿y con esos bloques que parecen de verdad? Están bonitos

pero chiquitos... ”¹, mostrando interés por la asignatura y el trabajo que se puede realizar con materiales manipulativos conocidos.

La actividad se desarrolla de manera grupal con el fin de identificar el impacto en el grupo y cada estudiante. Cada uno de los 35 estudiantes (ver Figura 3) conforman la muestra que participan activamente de las actividades planteadas.



Figura 3. Grupo muestral de grado quinto.

Motivación en el desarrollo de la actividad. Los estudiantes muestran curiosidad, un poco de miedo y preocupación por los problemas planteados al igual que por el uso de las herramientas propuesta en la actividad. Además, presentan interés por compartir sus resultados, hallazgos y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de los problemas planteados, es decir, se generó un ambiente de confianza y aprendizaje.

Logros obtenidos en la actividad inicial. Basados en la observación directa, el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes y las intervenciones realizadas, se evidencia que:

- El 100% de estudiantes realizan un desarrollo de las actividades con agrado, dedicación e interés por el aprendizaje.
- Se fortalece la participación, actitud y confianza de los estudiantes en la adquisición de las habilidades geométricas.
- Fortalecimiento en el uso del material manipulativo, al igual que en la metodología implementada para el desarrollo de la actividad.
- Se evidencia en algunos estudiantes una buena capacidad de observación, análisis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Dificultades obtenidas en la actividad inicial. Dentro de la aplicación de la actividad inicial se presentan las siguientes dificultades:

- Se presenta dificultad en plasmar las ideas, conjeturas o conclusiones de manera escrita de cada uno de los problemas planteados.
- Dificultad en el reconocimiento de los cuerpos geométricos y manejo conceptual de empaquetamiento.

¹ Opinión de los estudiantes.

- Menos del 30% de los estudiantes no presentan una solución al problema planteado, sin embargo, no alcanza el resultado o no identifica los errores presentados.
- Se evidencia en la mayor parte del grupo la baja capacidad de observación, análisis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Una gran oportunidad para incorporar el uso de las TIC en las clases, sin embargo, para algunos no es tomado como una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje de la geometría.

El desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, la motivación por lo aprendido, los logros alcanzados y las dificultades presentadas, establecen el estricto orden del análisis de los resultados obtenidos mediante la implementación de cada una de las actividades propuestas.

La observación directa y el análisis de las actividades desarrolladas por cada uno de los estudiantes, son los pilares para identificar las estrategias, las interacciones y los procesos heurísticos utilizados en la resolución de los problemas planteados en la actividad.

El uso de instrumentos como el material manipulativo como recursos didácticos, es importante para identificar los diferentes procesos geométricos desarrollados en la resolución de los problemas, lo cual favorece el desarrollo del pensamiento geométrico espacial desde los primeros años académicos.

Referencias y bibliografía

- Arboleda, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo del Van Hiele, con los estudiantes de sexto grado del Colegio San José de la comunidad marista. *XII Encuentro colombiano de matemática educativa*. Universidad del Quindío. Armenia, Colombia.
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Florez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para nivel medio superior en Cuba. *Tesis doctoral*. ICCP, La Habana, Cuba.
- Pólya, G. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. *Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*.
- Smalley, I. (2018). Simple regular sphere packings in three dimensions. *Revista de matemáticas MAA*. Vol. 36.