XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

O jogo dos palitos saltitantes generalizado

Rogério César dos **Santos**
Faculdade FUP Planaltina, Universidade de Brasília
Brasil
rogerc@unb.br
Elisângela Fernandes **Cerqueira** Secretaria de Educação do Distrito Federal
Brasil
eliselis1903@gmail.com

Resumo

O jogo dos palitos saltitantes consiste em se colocar 8 palitos em fileira e, com saltos sobre 2 palitos, formar pares, até que todos eles estejam pareados. Nosso trabalho consiste em generalizar o jogo dos palitos saltitantes, para saltos sobre mais palitos, a saber, saltos sobre 2n palitos, para todo n natural positivo. Mostraremos também que o número mínimo de palitos deve ser 4n+4. Esta pode ser uma interessante atividade para ser desenvolvida na escola para todas as idades, pois o jogo trabalha raciocínio lógico, noção de generalização, números pares e ímpares, expressões algébricas, podendo ser trabalhado o Princípio de Indução, no Ensino Médio ou Superior.

Palavras-chave: Educação Matemática; Jogo dos palitos; Expressões algébricas; Indução Matemática; Lúdico; Ensino de Matemática.

Introdução

Um dos grandes desafios dos professores de matemática é fazer com que o estudante desenvolva o raciocínio lógico e a argumentação. Neste contexto, o fomento da utilização de jogos matemáticos que corroboram com o aprendizado e a criatividade viabilizam este desenvolvimento. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), “os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes”, em particular, os jogos com palitos são ferramentas que auxiliam na construção do raciocínio matemático, pois permitem condições de aprendizagem de forma interativa e lúdica, com baixo custo e fácil manuseio.

Rigatti e Cemin (2021) apontam que a ludicidade aumenta o potencial criativo do estudante e a autonomia para descobrir padrões matemáticos, e facilita o entendimento de conceitos e cálculos em Matemática. A manipulação de material permite ao estudante escolher estratégias variadas de resolução de problemas.

Segundo as autoras, a utilização de jogos e brincadeiras como algo além da distração, com direcionamento do professor, eles se tornam uma ferramenta alternativa de ensino, que possibilita a educação alcançar aqueles alunos que possuem mais dificuldade no aprendizado da Matemática.

O jogo dos palitos proposto por Vignatti e Brito (2014), com 8 palitos, serviu para nós como motivação para que solucionássemos o caso geral com $4n + 4$ palitos, $n > 0$. O objetivo geral consiste em analisar o jogo dos palitos de modo que viabilize o desenvolvimento do raciocínio matemático. Os objetivos específicos são descrever a estratégia de resolução do jogo para o caso geral, estabelecer a quantidade mínima de palitos para cada tamanho do salto possível e, usando Indução, mostrar que, fixado o tamanho do salto, é possível vencer com mais do que $4n + 4$ palitos.

O jogo os palitos

A partir de $4n + 4$ palitos enfileirados (figura 1A) tal que $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, o jogo tem por objetivo cruzar os palitos e formar $2n + 2$ pares de palitos, como mostra a figura 1B:

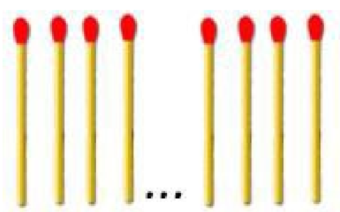


Figura 1A

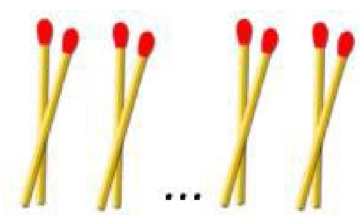


Figura 1B

Figuras 1A e 1 B. Posições inicial e final do jogo dos palitos.

Na falta de palitos, podem-se usar cartas de baralho, por exemplo.

Para que o objetivo seja alcançado, o jogador deve mover um palito "saltando" sobre $2n$ palitos (e somente $2n$) e formar par com o palito seguinte. Uma vez o par formado, este não pode ser mais mexido.

No artigo citado (Vignatti e Brito, 2014), o jogo é apresentado com $n = 1$, isto é, com $4n + 4 = 8$ palitos e com saltos sobre $2n = 2$ palitos, formando $2n + 2 = 4$ pares de palitos, ao final. Nossa ideia é generalizar uma estratégia de solução para todo n natural.

Estratégia para ganhar o jogo saltando $2n$ palitos

Vamos mostrar, então, o seguinte teorema:

Teorema 1. Nas regras apresentadas do jogo dos palitos, existe uma estratégia vencedora para o caso de saltos sobre $2n$ palitos, usando um total de $4n + 4$ palitos.

Mais adiante, mostraremos que $4n + 4$ é o mínimo de palitos para se ganhar o jogo no caso de saltos de tamanho $2n$, e mostraremos também que, com saltos fixados em $2n_0$ palitos, é possível ganhar o jogo com $4n_0 + 4 + 2n$ palitos, para todo $n \geq 0$.

A prova do Teorema 1 é dada pela estratégia de resolução apresentada a seguir. O primeiro salto será para a esquerda, de modo a deixar n palitos individuais na ponta da esquerda, como mostra a figura 2B, na qual, para o exemplo particular $n = 2$, foram deixados $n = 2$ palitos na ponta da esquerda:

Figura 2A

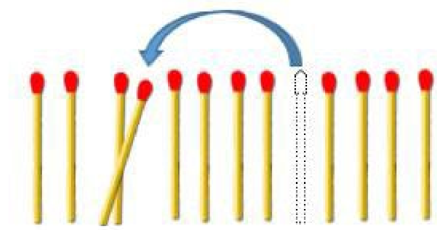
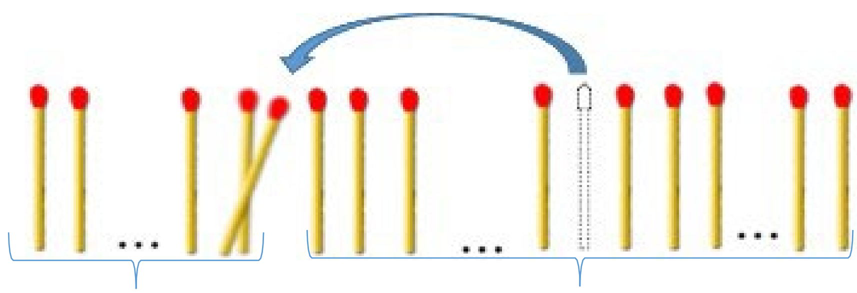


Figura 2B

Figuras 2A e 2B. Jogo com $4n + 4$ palitos: o primeiro salto na estratégia vencedora deve deixar n palitos individuais à esquerda. A figura mostra o primeiro pulo para o caso $n = 2$.

Após este primeiro salto sobre $2n$ palitos, são deixados n individuais à esquerda do primeiro par montado, e restam, portanto, à direita do primeiro par, $4n + 4 - n - 2 = 3n + 2$ palitos individuais à direita do primeiro par, como mostra a figura 3.



Bloco a esquerda com n palitos individuais e um par de palitos

$3n + 2$ individuais restantes: $3n + 2 = 1 + 2n + 1 + n$.

Figura 3. Após o primeiro salto, teremos n palitos individuais à esquerda e $3n + 2$individuais à direita do primeiro par formado.

Logo, decompondo $3n + 2 = 1 + 2n + 1 + n$, vemos que é possível deixar, simetricamente à direita, n palitos individuais na ponta da direita, pegando, para o segundo salto, um palito do centro para saltar sobre $2n$ palitos, para deixar n individuais na ponta da direita, como mostra a figura 4:

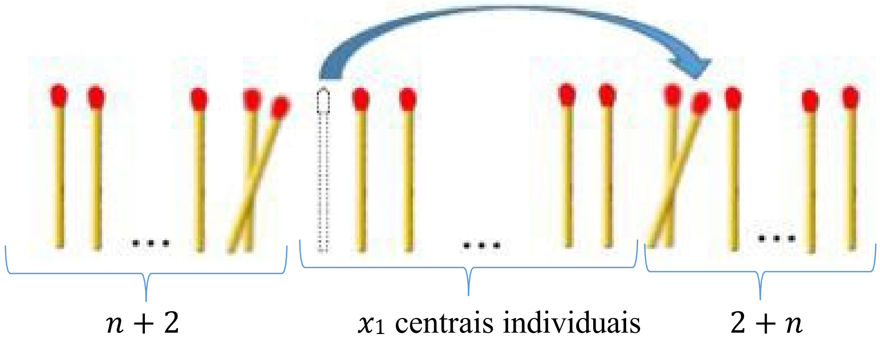


Figura 4. Segundo salto, deixando a estrutura simétrica com n palitos individuais em cada ponta.

Vamos chamar de x_j a quantidade de palitos centrais individuais após $2j$ saltos, isto é, após cada par de saltos. Após, portanto, estes primeiros $2 \cdot 1 = 2$ saltos, temos: n palitos individuais à esquerda, 2 palitos do primeiro par formado, x_1 palitos individuais entre os dois pares formados, 2 palitos do segundo par formado e n individuais à direita. Logo: $4n + 4 = n + 2 + x_1 + 2 + n$. Assim, restam $x_1 = 2n$ palitos centrais, individuais.

Agora, vamos à próxima etapa: pegamos um palito central (dentre os $2n$ localizados entre os dois pares formados) para formar par com o palito imediatamente à esquerda do primeiro par formado da esquerda, como mostra figura 5:

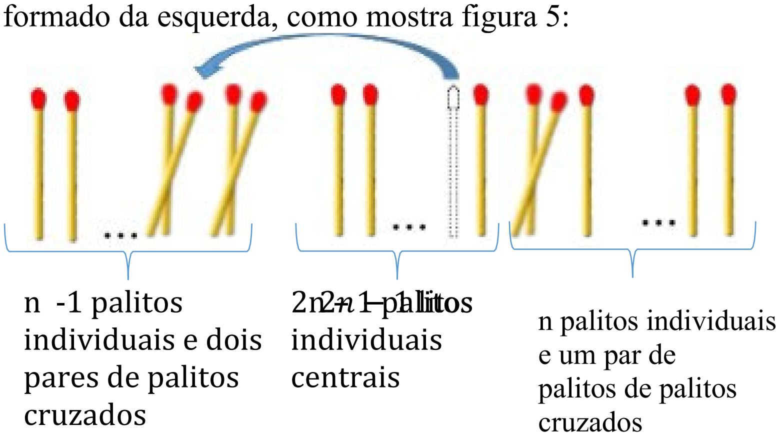
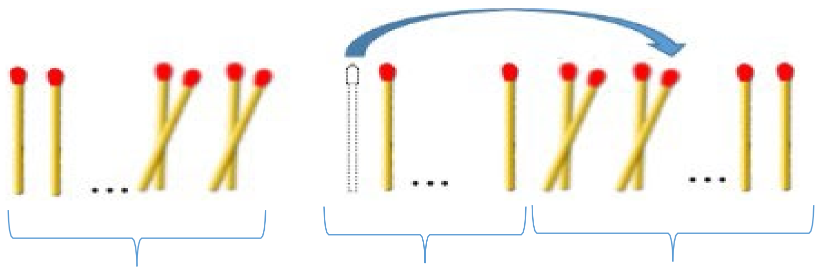


Figura 5. O terceiro salto, deixando $n-1$ palitos individuais à esquerda.

Teremos, após este terceiro salto: $n-1$ palitos individuais à esquerda, 4 palitos dos dois pares da esquerda, $x_1 - 1 = 2n - 1$ individuais centrais, 2 palitos do par da direita e os n individuais da ponta da direita.

Portanto, somando os $2n-1$ individuais centrais com o par da direita, são $2n - 1 + 2 = 2n + 1$ palitos, maior que $2n$, e, assim, é possível novamente pegar algum palito dos $2n-1$ centrais para pular $2n$ palitos e formar par com o palito imediatamente à direita do par da direita, no quarto salto, deixando a configuração dos palitos simétrica, como mostra a figura 6:



$n-1$ palitos individuais E dois pares de palitos cruzados

$2n-2$ palitos individuais

$n-1$ palitos individuais e dois pares de palitos cruzados

Figura 6. Quarto salto, deixando a estrutura simétrica com $n-1$ palitos individuais em cada ponta.

Logo, após os primeiros $2 \cdot 2 = 4$ pulos ($j = 2$), teremos, portanto:

$n-1$ na ponta da esquerda, 4 palitos dos dois pares formados da esquerda, $x_2 = 2n - 2$ centrais individuais, 4 palitos dos dois pares formados da direita e $n-1$ individuais da ponta da direita, totalizando os $4n + 4$ palitos.

Observe que, somando os $2n-2$ centrais com os 4 palitos dos pares formados da esquerda, são $2n - 2 + 4 = 2n + 2$ palitos, logo, novamente é possível pegar um palito central para pular para a esquerda, formando par com o palito imediatamente à esquerda dos pares formados da esquerda, realizando, assim, o quinto pulo. E, depois, restarão $2n-3$ centrais individuais que, somados com os 4 pares formados até então da direita, são $2n+1$ palitos e, por isso, novamente é possível pegar um central e pular por sobre $2n$ palitos para cair no palito imediatamente à direita dos pares formados da direita, no sexto pulo.

Desta forma, podemos montar a seguinte tabela, que mostra as configurações dos palitos após cada par de saltos, e cujas últimas linhas o leitor poderá verificar.

Tabela 1
Quantidade de palitos após $2j$ saltos, $j = 1,2, \ldots$

j	$2j$ = quantidade de pulos, de dois em dois.	Palitos individuai s à esquerda, após $2j$ pulos.	Palitos das duplas formadas da esquerda, após $2j$ pulos.	x_j = Palitos individuais centrais, após $2j$ pulos.	Palitos das duplas formadas da direita, após $2j$ pulos.	Palitos individuais à direita, após $2j$ pulos.
1	2	n	2	$2n$	2	n
2	4	$n-1$	4	$2n-2$	4	$n-1$
3	6	$n-2$	6	$2n-4$	6	$n-2$
...	...	...	...	$\ldots$	...	...
j	$2j$	$n - (j-1)$	$2j$	$2n - 2.(j-1)$	$2j$	$n-(j-1)$
...	$\ldots$	...	...	...	...	...
$n+1$	$2n+2$	0	$2n+2$	0	$2n+2$	0

Fonte: construída pelos autores.

Observe que, após o último salto, teremos $2n + 2$ palitos pareados de cada lado. Assim, o último j será aquele da equação $2j = 2n + 2$, $j = n + 1$.

Os saltos da estratégia são sempre possíveis?

Continuando a prova do teorema, vemos que, somando as colunas 4 e 5 da tabela 1, na linha j , temos $2n + 2$ palitos, ou seja, sempre é possível pegar um palito central para saltar sobre $2n$ palitos para a esquerda, e formar par com o palito imediatamente à esquerda do último par formado, para a realização do salto $2j + 1$.

E, após esse salto $2j + 1$ para a esquerda, teremos $2n - 2(j - 1) - 1$ palitos individuais centrais que, somados com os $2j$ pares da direita, somam $2n + 1$ palitos. Por isso, é sempre possível também pegar um palito central para pular para a direita, para formar par com o palito imediatamente à direita do último par formado da direita, realizando, assim, o salto $2j + 2$ para a direita.

Desta forma, fica demonstrado que os saltos são sempre possíveis, para qualquer $j > 0$. Assim, fica provado o teorema dos palitos saltitantes.

Na figura 7 é mostrada a sequência vencedora com $4n + 4 = 16$ palitos, onde $n = 3$. O risco preto sobre o palito indica o próximo palito a saltar sobre $2n = 6$ palitos. Observe que o primeiro salto deixa $n = 3$ palitos individuais à esquerda do primeiro par, conforme reza a nossa estratégia:

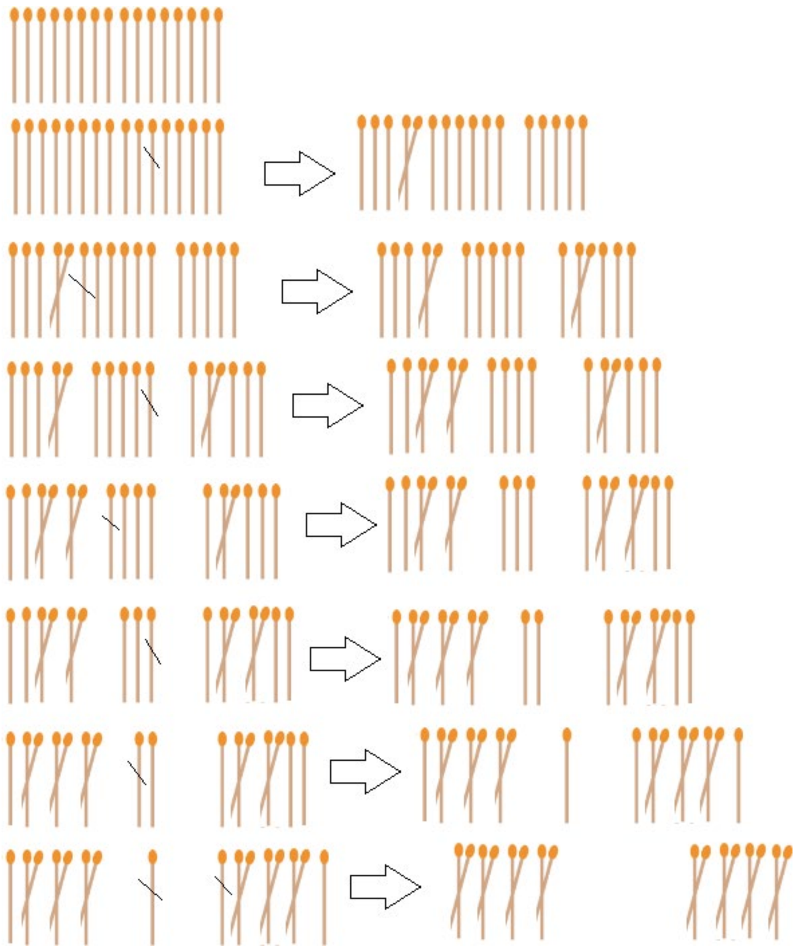


Figura 7. A estratégia vencedora com 16 palitos e saltos de tamanho 6.

Posição do primeiro palito que iniciará os saltos

O primeiro palito a saltar deve ser o de ordem $3n + 2$, da esquerda para a direita, pois: ele deve saltar $2n$ palitos, formar par com um palito e deixar n individuais à esquerda. Somando, portanto: ele próprio com os $2n$, com o palito a ser atingido, e com os n individuais deixados à esquerda, a sua posição será, portanto, a de ordem $3n + 2$.

Quantidade mínima de palitos: $4n + 4$

Vamos mostrar nesta seção que, para saltos sobre $2n$ palitos, a quantidade mínima que torna o jogo viável é de $4n + 4$ palitos, $n > 0$.

Note, inicialmente, que a estratégia apresentada demanda que haja sempre uma quantidade par de saltos, um para a esquerda e o seguinte para a direita.

Bem, no penúltimo salto, antes de finalizar o jogo, restam 2 palitos individuais centrais, 1 palito individual à esquerda, 1 palito individual à direita e o restante dos palitos que já estarão aos pares. Assim, a configuração de palitos antes do *penúltimo* salto é a seguinte: temos o último palito

individual da esquerda que irá receber o penúltimo palito saltador, mais $2n$ palitos que serão saltados que já estão aos pares e mais o penúltimo palito saltador, e, ainda: o último palito central saltador da direita, os $2n$ que serão saltados e o último palito individual da direita que receberá o último salto, somando, ao todo:$1 + 2n + 1 + 1 + 2n + 1 = 4n + 4$.
Assim, a quantidade mínima é de $4n + 4$ palitos, se os saltos são de tamanho $2n$.

A quantidade mínima é $4n + 4$, mas não a única para um salto fixo

Nesta seção, vamos mostrar que, dado $m > 0$, mantendo fixo o tamanho $2m$ do salto, é possível jogar com qualquer quantidade par de palitos maior ou igual a $4m + 4$, ou seja, qualquer quantidade $4m + 4 + 2n, n \geq 0$.

Vamos usar o Princípio da Indução Matemática. De acordo com Lima (2004), se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n resultar que P é válida também para seu sucessor $n + 1$, então P é válida para todos os números naturais.

Assim, por indução, seja P(n) a seguinte afirmação: dado $m > 0$ e fixado em $2m$ o tamanho do salto, é possível alcançar o objetivo do jogo com $4m + 4 + 2n$ palitos para todo $n \geq 0$. Por exemplo, com saltos de tamanho fixado em $2 \cdot 6 = 12$, é possível vencer o jogo com $4 \cdot 6 + 4 + 2n = 28 + 2n$ palitos, para todo $n \geq 0$. Vamos à prova.

Fixado o tamanho do salto em $2m, m > 0$, tome $n = 0$. Assim, teremos $4m + 4 + 2n = 4m + 4$ palitos, cuja estratégia vencedora já foi vista no Teorema 1. Logo, para $n = 0$, vale a proposição P.

Fixado ainda $m > 0$, suponha que P(n) é verdade para algum $n > 0, \epsilon N$, ou seja, é possível alcançar o objetivo do jogo para a quantidade de palitos igual a $4m + 4 + 2n$, com saltos de $2m$, $n > 0$. Provemos que vale para $4 \cdot m + 4 + 2(n + 1)$ palitos, mantendo o tamanho do salto fixo em $2m$.

Vejamos: considere a fileira com $4m + 4 + 2n + 2$ palitos. Tome o palito individual que está na posição $2n + 2$, da esquerda para a direita, salte $2n$ palitos para a esquerda e forme par com o primeiro palito da fila, não restando nenhum individual à sua esquerda, como mostra a figura 8:

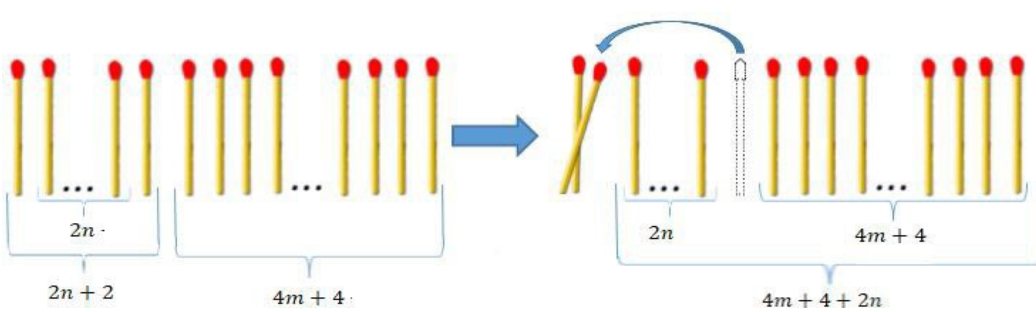


Figura 8. Formação do par na ponta da esquerda.

Logo, esse par na ponta da esquerda formado não participará mais do jogo, e o problema ficará reduzido aos $4m + 4 + 2n$ palitos individuais que estarão todos à direita deste par formado. Porém, sabe-se que com $4m + 4 + 2n$ palitos é possível vencer o jogo, por Hipótese de Indução sobre n. Assim, formando então os pares com estes, teremos formado todos os pares com os $4m + 4 + 2n + 2$ palitos.

Então, mostramos ser possível terminar a partida com todos os $4m + 4 + 2n + 2$ palitos e, assim, se P(n) é verdade, para $n \epsilon N$, então P$(n + 1)$ é verdade. Logo, pelo Princípio da Indução, é possível alcançar o objetivo do jogo para todo número de palitos par igual a $4m + 4 + 2n$, para $n \geq 0$, com saltos fixados em $2m$, onde m é pré-fixado, $m \geq 1$. Na figura 7, é possível ganhar o jogo para qualquer quantidade par de palitos maior ou igual a 16, com tamanho dos saltos fixado em 6 palitos.

Conclusões

Os jogos com palitos são ferramentas que podem ser utilizadas em sala de aula pelo professor de matemática, com o objetivo de desenvolver a iniciativa, a participação e o raciocínio lógico. No jogo aqui generalizado, no qual cartas de baralho podem também ser usadas no lugar dos palitos, foram apresentadas estratégia de solução e generalizações que podem, em sala de aula, ser associadas ao conteúdo de sequências numéricas e indução matemática.

A generalização do jogo dos palitos pode ser utilizada em qualquer etapa escolar, para alunos de qualquer idade. Para alunos que ainda não viram álgebra, pode-se simplesmente apresentar o jogo com o intuito de se trabalhar o raciocinio lógico dos estudantes.

Para alunos que já tiveram contato com equações do primeiro grau, polinômios e operações com polinômios, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, pode-se apresentar o jogo, a tabela 1, a prova de que é possível terminar o jogo e a demonstração da quantidade mínima de movimentos.

Enfim, para alunos do Ensino Superior de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática ou outro curso da área de Exatas, pode-se apresentar o jogo, as demonstrações e também a prova por Indução Matemática de que é possível terminar o jogo com qualquer quantidade par de movimentos a partir do número mínimo.

Sugere-se, após os estudantes atingirem o objetivo do jogo, que o professor construa com eles as inferências, hipóteses e demonstrações das estratégias encontradas e pergunte a eles quais outros aspectos matemáticos do jogo podem ser percebidos e generalizados.

Referências Bibliográficas

Lima, Elon Lages. *Análise Real*. Volume 1.7ª edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2004.

Rigatti, Keitiane; Cemin, Alexandra. O papel do lúdico no ensino da Matemática. *Revista Conectus*, Caxias do Sul, RS, v.1 n.1, mar / abr. 2021.

Secretaria De Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática, MEC, Brasília, 1998.

Vignatti, A. e Brito, P.F. Jogos de palito e indução finita. *Revista Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira Matemática. Volume 84. Rio de Janeiro, 2014.