

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Génesis instrumental de profesores de Matemática a partir de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI)

María Rita **Otero**

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Argentina

rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar

María Paz **Gazzola**

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Argentina

mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Viviana Carolina **Llanos**

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Argentina

vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se describe la génesis instrumental de 62 profesores de matemáticas en servicio, durante un curso universitario on-line, que conciben la enseñanza a partir de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) relativo a nociones matemáticas de la escuela secundaria. Se emplean la Aproximación Instrumental de lo didáctico y la noción de esquema de Vergnaud (2013) para describir la génesis instrumental de los profesores, que enfrentan dos clases de situaciones: estudiar y analizar el REI y luego diseñar una enseñanza hipotética a partir de él. Se analizan la totalidad de las respuestas individuales escritas de los profesores en ambas situaciones y se reconstruyen sus esquemas e instrumentos. La investigación evidencia la diversidad y la riqueza de la génesis instrumental de los profesores y las modificaciones que realizan al recurso, principalmente vinculadas con la situación de enseñanza y caracterizadas por reducir el saber a enseñar y su cuestionamiento.

Palabras clave: Formación continua; Educación matemática; Esquema; Génesis Instrumental; Recorridos de estudio e Investigación.

Introducción

La distancia entre las prácticas habituales de los docentes y el tipo de enseñanza que se pretende con un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), enmarcado en el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013), es muy grande. Pocos artículos hacen referencia a cómo los docentes utilizan y transforman un REI mientras enseñan o piensan en enseñar con él (Wozniak, 2015; Otero & Llanos, 2019). En un estudio de caso (Gueudet, Lebaud, Otero, & Parra, 2018) analizamos la génesis instrumental/documental de una profesora de la escuela secundaria francesa mientras enseñaba con un REI relacionado con el funcionamiento de las antenas parabólicas. Por otro lado, también se identificaron y clasificaron los invariantes operatorios presentes en el caso mencionado (Parra y Otero, 2021), poniendo en evidencia que aun cuando por iniciativa propia, la docente quería enseñar con un REI, los invariantes operatorios que generaban su actividad no eran compatibles con el paradigma del cuestionamiento ni con un uso apropiado del recurso. Aquí asumimos que se requiere una preparación y formación de los profesores en la TAD y sobre los REI, y que, además, los primeros pasos deben realizarse con dispositivos más acotados, que por ejemplo, involucren cuestiones intramatemáticas, que no resulten excesivamente alejadas de los saberes propuestos por los programas que los docentes enseñan habitualmente (Gazzola & Otero, 2022; Otero & Gazzola, 2022). En este trabajo nos interesamos en la génesis instrumental de 62 profesores en servicio que participan de un curso de capacitación en la universidad, donde se les propone concebir la enseñanza con un REI, relativamente simplificado. Los marcos teóricos son el Enfoque Instrumental (Rabardel, 1995) y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990, 2013) que permiten analizar la actividad en situación y la génesis instrumental de los docentes mencionados.

Situación, acción, actividad, esquemas y génesis instrumental

La TCC es una teoría pragmática de la conceptualización de lo real que, mediante la noción de esquema, permite analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que en ella se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, así como la conceptualización en la acción y el desarrollo en un cierto dominio. La TCC estudia el desarrollo de la conceptualización en la acción a todo nivel, es decir en la escuela, en la vida y en el desarrollo profesional. Según Vergnaud (1990, 2013) un esquema es la organización invariante de la actividad para una clase de situaciones. En consecuencia, mientras la actividad y la conducta observable que el esquema engendra son variables, la organización de la actividad es invariante. Un esquema está compuesto necesariamente por cuatro clases de componentes: una meta o varias, submetas y anticipaciones, las reglas de acción, de toma de información y de control, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias.

El enfoque instrumental fue propuesto por Rabardel (1995) a partir de la Teoría de la Actividad de Vygotsky y de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 2013). En las situaciones en las cuales las personas utilizan un artefacto, ya sea material o no, tiene lugar un proceso de apropiación, que requiere distinguir entre el artefacto en sí y el instrumento que la apropiación genera. Es mediante este proceso, denominado por Rabardel (1995) génesis instrumental, que el artefacto se vuelve un instrumento para el usuario. La actividad del usuario y

la situación que la promueve son determinantes. Los instrumentos se generan por las interacciones que ocurren entre un artefacto y los esquemas (Vergnaud, 2013) del sujeto en una cierta situación. Un instrumento es entonces una entidad mixta, compuesta al menos por una parte del artefacto más un esquema de uso de dicho artefacto. La génesis instrumental, comprende dos procesos interrelacionados (Rabardel, 1995): instrumentación e instrumentalización. La instrumentalización está relacionada con la personalización del artefacto y la instrumentación con la aparición de esquemas en el sujeto.

Recorridos de estudio e investigación (REI)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) define los REI como dispositivos didácticos cuya principal función es proponer el estudio escolar en términos de preguntas. El cuestionamiento comienza por una pregunta en sentido fuerte, llamada generatriz, de la cual se derivan una multitud de nuevos interrogantes, que no están establecidos de antemano. Se trata de estudiar los saberes, en este caso matemáticos, que conducen tanto a la elaboración de una o varias respuestas posibles -no inmediatas, ni arbitrarias, ni únicas- como a nuevos cuestionamientos y nuevos estudios. Estudiar e investigar dialécticamente requieren acciones o gestos tales como: formular preguntas y construir respuestas, explorar disciplinas y delimitar áreas, entrar y salir de los temas, estudiar lo pertinente y necesario, fabricar el medio de estudio justificando la incorporación de un cierto saber, repartir las tareas del estudio, cooperar y colaborar en la construcción de respuestas, deconstruir y reescribir respuestas existentes, difundir y recibir respuestas. Para enseñar con un REI, antes de llevarlo al aula, el profesor tiene que estudiar la pregunta generatriz y su arborescencia, así como su potencialidad didáctico-matemática.

Metodología

En esta investigación intervinieron 62 profesores de matemática en servicio que realizaron un curso universitario on-line de didáctica de las matemáticas durante cuatro meses. La mayor parte de ellos se desempeña en la enseñanza secundaria y su experiencia docente es entre 2 y 36 años. En el curso se enseñan los fundamentos de la TAD y de los REI. En el último mes, los profesores enfrentan dos tipos de situaciones: a) estudiar un REI en profundidad, b) proponer una organización hipotética de la enseñanza con el REI (no es posible que cada profesor lleve al aula su propuesta durante curso). Los profesores subieron todas las respuestas a la plataforma Moodle. En este trabajo se analizan los protocolos correspondientes a la primera situación de estudio y a la última situación de enseñanza, que son de respuesta individual. Para identificar los componentes de los esquemas así como las acciones “observables” se emplean técnicas de análisis y meta-análisis. El problema es conocido como “la caja del pastelero” (Chappaz & Michon, 2003) y se presentó de la siguiente manera:

Hay que construir cajas, siguiendo las instrucciones del video:

<https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY>

¿Cuáles son el alto, el ancho y el largo de las cajas que se obtienen si se considera cualquier hoja, y cómo se calcularían el volumen, la superficie de la base, el perímetro total, etc.?

¿Cómo podemos fabricar cajas anidadas con las hojas A0, A1, A2, A3, A4, etc.?

Analizando la geometría de la caja desplegada se obtienen las relaciones que vinculan las dimensiones de la hoja con las de la caja, que se expresan mediante funciones polinómicas en

dos variables (Figura 1). Para reducir las variables se pueden parametrizar uno o ambos lados de la hoja, o la superficie, o el volumen o el perímetro de la caja.

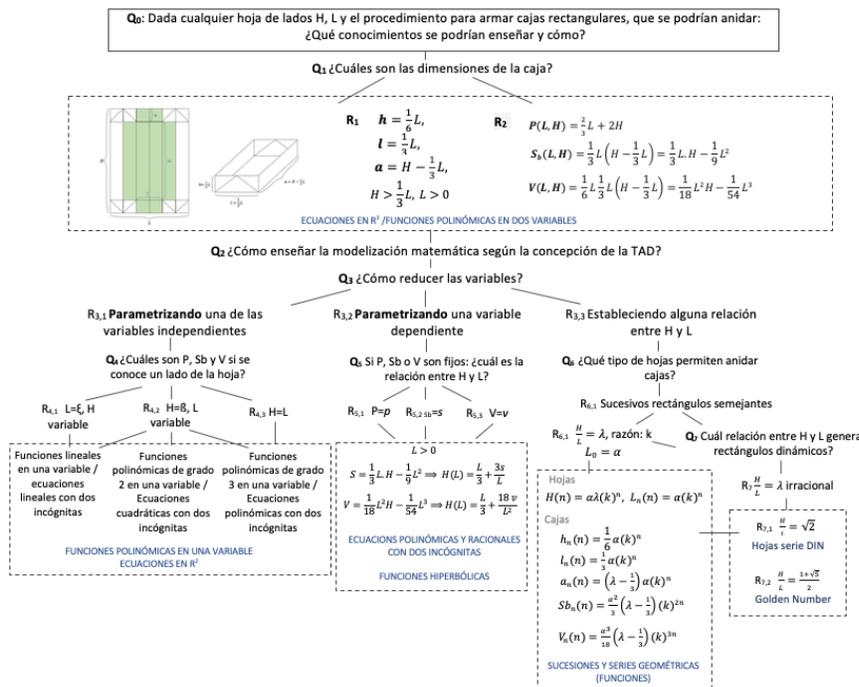


Figura 1. Posibles alternativas de solución.

Según cuál de los lados de la hoja sea un parámetro, todas las funciones serán lineales o no. Si se fija el volumen o a la superficie, se obtienen ecuaciones racionales en dos variables y es posible expresar un lado en función del otro, generando familias de funciones hiperbólicas representadas por curvas de isosuperficie y de isovolumen. El problema de “anidar” las cajas, requiere considerar posibles series de hojas rectangulares, cuyas dimensiones conforman progresiones geométricas. Si los lados mayor y menor de cada una de las hojas conservan la proporción $\frac{H}{L} = \tau$, siendo τ un número irracional, los rectángulos son dinámicos. Un caso particular es la serie de hojas DINa donde $\frac{H}{L} = \sqrt{2}$ y la superficie de la primera hoja es un metro cuadrado. Así, surge la pregunta por la utilidad de esta proporción, que resuelve el problema de la división en dos o de la duplicación de rectángulos semejantes, puesto que, al doblar la hoja por la mediatriz del lado mayor, se obtienen sendas hojas iguales del formato siguiente, que conservan la proporción de los lados de su antecesora. Es posible considerar otras proporciones notables entre los lados de las hojas, tales como la del número áureo, cuyo descubrimiento se relaciona con el estudio de la difundida sucesión de Fibonacci. Si la constante de proporcionalidad entre los lados de los rectángulos es un número racional, estos son estáticos, los cuales, bajo ciertas condiciones, permiten construir cajas anidadas. Para que las cajas se aniden, la proporción entre los lados de cada hoja debe ser igual a la existente entre los lados homólogos de dos hojas sucesivas. Este estudio involucra también interesantes técnicas y propiedades geométricas sintéticas de la división de segmentos y de los rectángulos.

Resultados

En la situación propuesta para estudiar el problema, los profesores evidencian dos metas: escribir las fórmulas que relacionan las dimensiones de la caja y de las hojas, y anidar las cajas (Figura 2). Para la primera, se identifican al menos dos tipos de esquemas diferenciados según la manera de obtener las fórmulas. Los profesores que tienen el esquema E_{11} obtendrían las fórmulas por “generalización numérica” de las relaciones, mediante ciertas medidas que ellos proponen priori. Aquí, la caja desarmada tiene un papel secundario. Los IO de E_{11} son: “Hay que establecer las medidas de las hojas”, “Hay que armar las cajas”, “Las dimensiones de las cajas se calculan con números”, “Los estudiantes obtienen las fórmulas a partir de los números”. Los profesores que tienen el esquema E_{12} , buscan establecer y formular matemáticamente las relaciones geométricas emergentes del proceso de construcción de la caja. Para armar la caja utilizaron una hoja de lados desconocidos, en este caso, es tan importante armarla como desarmarla. Así, formularon las relaciones entre la hoja y los lados de caja, el perímetro, la superficie y el volumen. Los IO distintivos son: “Hay que usar cualquier hoja”, “Hay que armar la caja”, “Hay que desarmar la caja”, “Las fórmulas surgen del análisis de la caja desplegada”. Se observa que todos los profesores escribieron todas las dimensiones de la caja en dos variables.

La otra meta es anidar las cajas y da lugar a cuatro esquemas, que se diferencian en cómo los profesores usan la información sobre las características de las hojas. Una primera diferenciación se debe a si las hojas DIN A son tomadas en cuenta o no. Si no se toman en cuenta, los profesores asumen que las cajas se anidan si se construyen con hojas cuya área decrece arbitrariamente y eligen hojas cuyos valores de los lados son conocidos E_{21} (13/57). Así, calculan numéricamente el alto, ancho y largo de la caja y/o alguna dimensión (superficie de la base o volumen) y analizan si esos valores son cada vez menores. Los IO son: “Hay que usar hojas cada vez menores”, “Las dimensiones de las cajas anidadas son cada vez menores”, “Armando las cajas se comprueba que se anidan”. El esquema E_{22} (13/57) es diferente porque genera un criterio para variar el tamaño de las hojas. El IO distintivo es: “Hay que establecer un criterio para variar las hojas” y los otros dos invariantes son los mismos. Se remarca que casi la mitad de los profesores no toma en cuenta las hojas DIN A, y asumen erróneamente que es necesario y suficiente usar hojas cada vez menores para que las cajas se aniden.

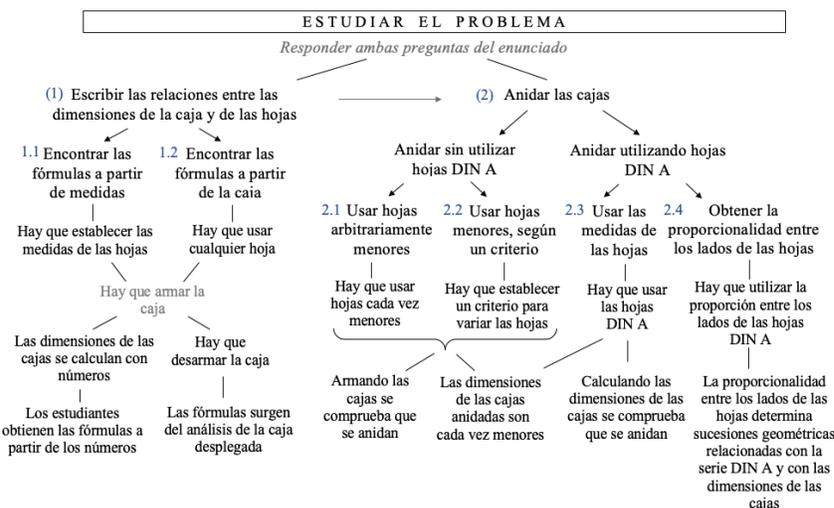


Figura 2. Esquemas identificados en la situación de estudio.

Si se toman en cuenta las hojas DIN A, los esquemas difieren por considerar estrictamente las medidas de las hojas, y enfocarse en los números o en la proporcionalidad entre sus lados. Los profesores que tienen el esquema E₂₃ (15/57) obtuvieron en internet las medidas de las hojas de la serie y calcularon numéricamente una o varias dimensiones de la caja y elaboraron tablas. Los invariantes identificados son: “Hay que usar las hojas DIN A”, “Las dimensiones de las cajas anidadas son cada vez menores”, “Calculando las dimensiones de las cajas se comprueba que se anidan”. Los que tienen el esquema E₂₄ (16/57) también utilizan la serie DIN A, pero toman en cuenta la razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas y la emplean para escribir las sucesiones (de las hojas, de lados de la caja, del perímetro, de la superficie de la base y o del volumen). Los IO son: “Hay que utilizar la proporción entre los lados de las hojas DIN A”, “La proporcionalidad entre los lados de las hojas determina sucesiones geométricas relacionadas con la serie DIN A y con las dimensiones de las cajas”.

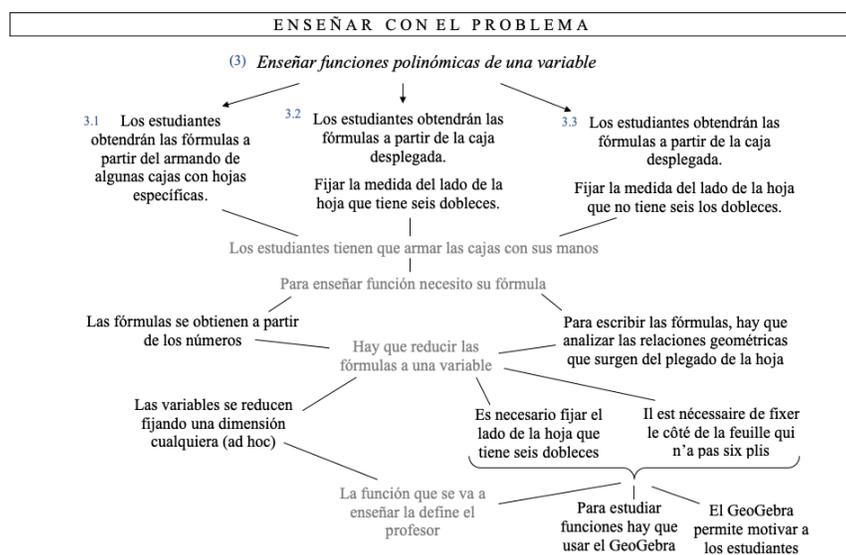


Figura 3. Esquemas identificados en la situación de enseñanza sobre las funciones polinómicas.

En la situación de enseñanza, se identificaron dos metas disyuntas: enseñar funciones polinómicas en una variable de grado uno a tres, o enseñar sucesiones geométricas. Esto produce modificaciones en el dispositivo y genera instrumentos diferentes. En el primer caso (Figura 3), surgen tres submetas, según cómo los docentes proponen obtener las fórmulas a los estudiantes. Ellos deciden parametrizar un lado de la hoja, sin analizar las consecuencias didáctico matemáticas de esta acción. Una vez obtenida la fórmula deseada, el profesor define la función correspondiente. En el esquema E₃₁ (8/25) la submeta es que los estudiantes obtengan las fórmulas a partir del armado de algunas cajas con hojas específicas. Los IO son: “Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos”, “Para enseñar función necesito su fórmula”, “Las fórmulas se obtienen a partir de los números”, “Hay que reducir las fórmulas a una variable”, “Las variables se reducen fijando una dimensión cualquiera (ad hoc)”, “La función que se va a enseñar la define el profesor”.

Alternativamente, en los esquemas E₃₂ y E₃₃ las fórmulas se obtienen de las relaciones geométricas que se evidencian al armar y desarmar la caja. Por otro lado, surge el uso del GeoGebra como una herramienta para el estudio y por su carácter motivador. La diferencia reside en qué lado de la hoja se fija. Los profesores que poseen el esquema E₃₂ (4/25) fijan el

lado de la hoja que tiene los seis dobleces y sólo podrán enseñar la función afín. Los IO son: “Hay que reducir las fórmulas a una variable”, “Es necesario fijar el lado de la hoja que tiene seis dobleces”, “Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos”, “Para enseñar función necesito su fórmula”, “Para escribir las fórmulas, hay que analizar las relaciones geométricas que surgen del plegado de la hoja”, “La función que se va a enseñar la define el profesor”, “Para estudiar funciones hay que usar el GeoGebra”, “El GeoGebra permite motivar a los estudiantes”. En el esquema E₃₃ (13/25) los profesores fijan el lado de la hoja al que no se le realizan los seis dobleces y entonces podrán enseñar funciones polinómicas de grado uno a tres. El único IO diferente es “Es necesario fijar el lado de la hoja que no tiene seis dobleces”.

Cuando la meta es enseñar sucesiones geométricas, ya solo se utilizan las hojas DIN A y siempre se propone obtener las fórmulas desde la caja desplegada. Se identifican tres esquemas que difieren en cómo se obtendrá la razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas (

4). En el esquema E₄₁ (10/30) dicha razón se obtiene a partir de las medidas específicas de las hojas. Los IO característicos son: “Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos”, “Para escribir las fórmulas, hay que analizar las relaciones geométricas que surgen del plegado de la hoja”, “Para los estudiantes la manera más sencilla de obtener las relaciones entre los lados de las hojas es numéricamente”, “Hay que formular el término enésimo para cada sucesión”, “Las fórmulas de las sucesiones se obtienen a partir de los números”, “El profesor es quien define la sucesión”, “Las cajas se pueden anidar si las magnitudes calculadas son sucesivamente menores”. En E₄₂ (12/30) el profesor informa la razón de proporcionalidad entre los lados, o indica a los estudiantes buscarla en internet. Los IO diferentes son: “Hay que informar a los estudiantes el valor de la constante de proporcionalidad entre los lados de las hojas”, “Las sucesiones se formulan algebraicamente” y “Las cajas se anidan si se pueden colocar una dentro de la otra”. Los profesores que poseen el esquema E₄₃ (8/30) proponen obtener y justificar geoméricamente la proporción entre los lados de las hojas DIN A, mediante el teorema de Thales. Los IO que lo diferencian son: “La razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas DIN A se obtiene geoméricamente” y “Las cajas se anidan si todos sus lados y dimensiones son proporcionales”.

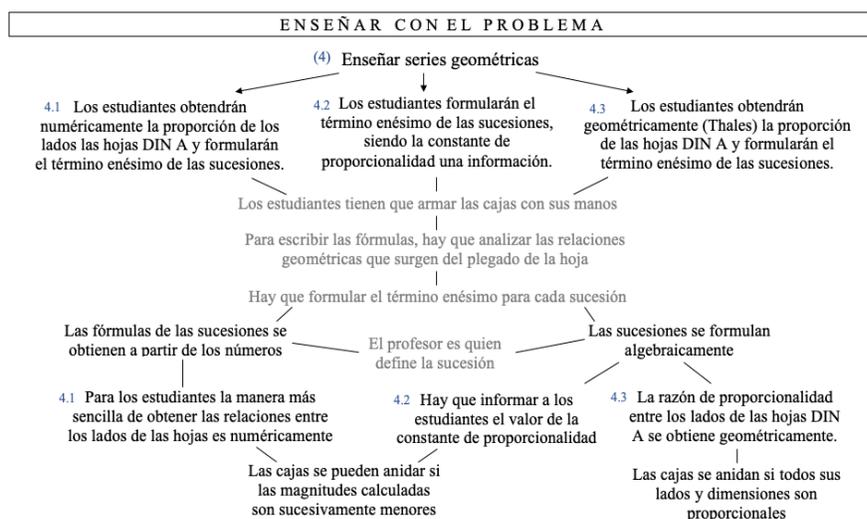


Figura 4. Esquemas identificados en la situación de enseñanza sobre las series geométricas.

Consideraciones finales

En la situación de estudio, el objetivo de los profesores es responder y solo unos pocos relacionan explícitamente el problema con nociones matemáticas. En la situación de enseñanza, los profesores segmentan el recurso generando tres instrumentos con sus respectivos esquemas para enseñar funciones polinómicas, mientras los restantes profesores, producirán otros tres instrumentos para sucesiones geométricas. Esta segmentación se debería a invariantes operatorios que asocian un problema a un único tema del programa enseñado (Gazzola & Otero, 2022), siendo esto un obstáculo para desarrollar enseñanza por investigación, porque el profesor no concibe ni habilita el reparto de tareas de estudio y de investigación en simultáneo, a cargo de diferentes estudiantes del mismo curso. También le resulta inconcebible el estudio simultáneo de saberes que en el programa están separados. En la situación de estudio casi todos los profesores usarían la caja desplegada para obtener el modelo matemático, mientras en la situación de enseñanza, 1/3 de quienes enseñarán funciones polinómicas pretende modelar con números. Esto puede relacionarse con la ausencia de actividades genuinas de modelado en la enseñanza habitual. Los profesores escribieron las expresiones en dos variables, pero, rápidamente las descartaron, porque no serían enseñables en la escuela secundaria. En la situación de enseñanza, la mayoría fijó en acto, el lado que permite tratar las funciones polinómicas hasta el grado tres, sin evidenciar un análisis previo durante la situación de estudio, donde no hubo interrogantes sobre la reducción de las variables, ni sobre qué podría estudiarse fijando alguna de ellas, ambas, u otra dimensión. Frente al problema de la anidación, en la situación de estudio y como primera respuesta, los profesores no relacionaron la pregunta con las series geométricas. Los instrumentos propuestos circunscriben las preguntas o problemas solo al inicio de un “tema”, continuando luego de manera tradicional, lo cual es un obstáculo para mantener “viva” la cuestión. Las acciones identificadas muestran que los aspectos productivos de la actividad de los profesores prevalecen sobre los constructivos (Pastré, Mayen & Vergnaud, 2006), es decir que ésta, reposa sobre los invariantes operatorios que les aseguran cierto “éxito” en la enseñanza. Aún en el marco de un curso de capacitación, durante la concepción de una enseñanza hipotética con un dispositivo “nuevo”, sus esquemas los dirigen a vincularlo con un único saber matemático escolar del programa. En la práctica profesional habitual, no es necesario, ni seguro, cuestionar el saber a enseñar, ni es productivo expandir las posibilidades de una cuestión, ni asumir que el conocimiento es siempre intencional e incompleto. Todo lo expuesto continúa interpelándonos sobre las características de la formación para producir un cambio de paradigma de enseñanza.

Referencias

- Chappaz, J. ; Michon, F. (2003). Il était une fois.... La boîte du pâtissier. *Grand N.* 72, 19-32.
- Chevallard, Y. (2013). *Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1. Enquête codisciplinaire & EDD.* Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf
- Gazzola, M. P.; Otero, M. R. (2022). Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemática en servicio. *PNA*, 16(4), 281-307. <http://doi.org/10.30827/pna.v16i4.22040>
- Gueudet, G. ; Lebaud, M. P. ; Otero, M. R. ; Parra, V. (2018). Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche : une étude de cas en Première S. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 38(3), 275-314.
- Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2019). Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 8(2), 193-225.

- Otero, M. R.; Gazzola, M. P. (2022). Instruments and schemes of in-service mathematics teachers during the design of teaching based on questioning. *Review of Science, Mathematics and ICT Education* 16(2), 5 - 25.
- Parra, V.; Otero, M. R. (2021). Operational Invariants and Instrumentalization of Artefact Study and Research Path for High School: A Case Study. *Acta scientiae*, 23(6), 334-362. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6167>
- Pastré P., Mayen P. y Vergnaud G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie*, 154, 145-198. <https://doi.org/10.4000/rfp.157>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 33-170.
- Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y aprendizaje*, 36(2),131-161.
- Wozniak, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en éducation*, 21. <https://doi.org/10.4000/rec.7578n>