Dificultades en la operatoria de los números enteros: Análisis de los obstáculos en el aprendizaje del estudiante

Matías **Cornejo** Roco
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
matias.cornejo2019@umce.cl
Valeria Llanos **González**
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
valeria.llanos2019@umce.cl
Noemí **Pizarro**
Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl

Resumen

La enseñanza de la matemática ha mostrado instancias donde los y las estudiantes presentan dificultades en su aprendizaje, por lo que es necesario identificarlas para trabajarlas en favor del aprendizaje de los estudiantes. Este estudio se centra en la identificación de los obstáculos epistemológicos y didácticos que surgen en la enseñanza de las operaciones aritméticas de los números enteros en estudiantes de Educación Primaria. Para llevar a cabo el estudio, se realizaron dos grupos focales de cinco estudiantes de enseñanza primaria cada uno, pertenecientes a los cursos donde se inicia la enseñanza de los números enteros. Los resultados obtenidos muestran la presencia de obstáculos epistemológicos desarrollados en estudiantes relacionados con los algoritmos de adición y multiplicación.

Palabras clave: Obstáculos epistemológicos; Obstáculos didácticos; Números enteros; Números negativos; Educación; Tipos de representaciones.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas se encuentra presente a lo largo de toda la escolaridad, existen instancias donde posiblemente se evidencian diversos tipos de problemas y obstáculos de aprendizaje. Orrantia (2006) comenta que en el área matemática donde más dificultades presentan los estudiantes es en la aritmética, y que estas dificultades posteriormente afectan en otras áreas como la geometría, probabilidad, etc. En el caso de los números enteros, Zapatera (2021) evidencia la existencia de obstáculos epistemológicos que surgen en su enseñanza, donde los estudiantes siguen trabajando con estos como si fuesen números naturales. Para el tratamiento de estas dificultades es indispensable identificar los problemas desde la raíz, es decir, desde que se realizó la enseñanza de los contenidos. Al solucionar estas dificultades, en un futuro se les facilitará el aprendizaje de nuevos conocimientos que incluyan estas operaciones, como lo pueden ser el uso de números enteros en polinomios de grado 2 o mayor. Considerando lo anterior, este documento presenta parte de una investigación que responde a la pregunta ¿Qué problemáticas surgen en el proceso de aprendizaje de operaciones aritméticas de números enteros en la escuela? Para ello, se entrevista a estudiantes de 7° y 8° año básico y se observan obstáculos en la operatoria de los números enteros.

Referentes Teóricos

El concepto de obstáculo es acuñado por Bachelard (1938) el cual lo define como aquellos problemas para el aprendizaje que surgen por el mismo acto de conocer debido a una necesidad funcional, pero dificultan el aprendizaje interfiriendo con el aprendizaje de los conocimientos reales. Además, comenta que "la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación" (p. 19), por lo que se pueden abordar dentro de la enseñanza en el aula.

En cambio, Brousseau (2007) define a los obstáculos como conocimientos los cuales se consideraron válidos en cierto momento, pero dicha validez se pierde cuando el campo de implementación se cambia o se amplía. Los nuevos conocimientos válidos se contraponen con los obstáculos ya desarrollados, sobre esto Brousseau menciona: "El obstáculo no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento. Por el contrario, opone resistencia a su adquisición, a su comprensión, frena su aplicación, subsiste en estado latente y reaparece de forma imprevista" (2007, p 46). A diferencia de Bachelard, Brousseau les da importancia a estos obstáculos debido a su validez temporal, a diferencia de Bachelard quien los considera como un problema el cual debe rechazarse desde el inicio por su no veracidad. (Cid, 2016)

En la interpretación de Glaeser (1981) sobre los obstáculos, este adopta una postura más general, en la cual caben definiciones como de error, dificultad, desconocimiento. Esto se contrapone a las definiciones de Bachelard y Brousseau, debido a que cabe la posibilidad de considerar como obstáculo algo desconocido, la ausencia de un conocimiento.

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos según el origen entre que estos tienen, se categorizan como obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos. "Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo" (1983, p.73). Todos aquellos obstáculos que dependan única y exclusivamente del trabajo docente se considerarán como didácticos. Sin embargo, también se infiere que hay obstáculos que se presentan dentro de la enseñanza de las matemáticas, pero que no se consideran como tal, los cuales podrían ser epistemológicos debido a su pertinencia en las matemáticas. Además, agrega que "éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría evitarlo" (1983, p. 72), por lo tanto, estos obstáculos son evitables mediante decisiones didácticas adecuadas.

Por otra parte, define los obstáculos ontogenéticos como "los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo: el desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos." (Brousseau, 1983, p 73), por lo que la causa es externa a la enseñanza de las matemáticas o el actuar docente.

Glaeser (1981) clasifica los obstáculos epistemológicos que se evidencian dentro del desarrollo de los números enteros en la historia en seis categorías, los cuales son:

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. No se aceptan números negativos aislados de manera aislada, como en las soluciones a problemas.
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Se aceptan los números negativos de forma aislada, pero no se le da un significado real, se les considera falsas.
3. Dificultad para unificar la recta real. Se les da un sentido a las cantidades negativas, pero se consideran completamente opuestas a lo positivo. Debido a esto se trabaja como dos semirrectas opuestas y no como solo un sistema unificado. (Cid, 2016)
4. La ambigüedad de los dos ceros. Se concibe como la existencia de un cero absoluto y un cero arbitrario, los cuales no coexisten en un mismo espacio. No se puede pensar en una cantidad negativa como algo menor que nada, dado que el cero es absoluto.
5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Las operaciones realizadas con números negativos se centran únicamente a las cuales se pueda aplicar en un contexto real. No se operan de manera abstracta descontextualizada.
6. Deseo de un modelo unificador. La necesidad de encontrar un modelo concreto que justifique tanto la adición como la multiplicación, lo cual no existe.

La enseñanza de los números enteros va de la mano con las diferentes formas de representaciones. Jerome Bruner (1969) en su libro *Toward a Theory of Instruction* define tres tipos de representaciones, formas en las cuales los estudiantes aprenden y reproducen sus conocimientos, representaciones concretas, pictóricas y simbólicas. Muñoz (2019) menciona que "En Chile se plantea desde el Ministerio de Educación, la enseñanza de las Matemáticas con el modelo concreto-pictórico y simbólico (COPISI) que está basado en los modos de representación propuestos por Bruner." (p 23)

Según los Planes de Estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (2016), los números enteros se enseñan principalmente en dos instancias, 7° y 8° básico (12 y 13 años). En 7° básico se les enseña el concepto de número entero y cómo sumar y restar, mientras que en 8° básico se centra en la enseñanza de la multiplicación y división de números enteros.

Marco metodológico

La metodología de investigación utilizada es cualitativa, mediante un estudio de caso para identificar obstáculos en el aprendizaje de los números enteros que presentan estudiantes de 7° y 8° básico (12 y 13 años) en un colegio municipal de Maipú, Chile.

Como instrumento de recolección de datos se contempla la realización de un grupo focal y una entrevista semi estructurada. En particular, en esta comunicación se reporta lo que corresponde a la aplicación del grupo focal, ya que la entrevista se tiene pendiente de aplicar en una segunda parte del estudio.

La intención de este grupo focal es identificar posibles obstáculos asociados a la operatoria aritmética de los estudiantes de dichos cursos. En este participaron diez estudiantes, las preguntas correspondientes a 7° Básico fueron sobre la adición y sustracción, mientras las aplicadas a 8° Básico trataron sobre la multiplicación y división de números enteros. Los entrevistados se escogieron al azar entre los integrantes de un curso de cada nivel educativo, los cuales posteriormente mencionaron que eran buenos en matemáticas y tenían resultados sobre la media de sus respectivos cursos.

Entre las preguntas realizadas se preguntó: ¿Qué es un número entero? ¿Qué es un número negativo? ¿Qué ejemplos de números negativos conocen? ¿Se les hace fácil o difícil cuando resuelven operaciones con números enteros? ¿Cómo se suman los números enteros? ¿Cómo se restan? ¿Cómo se multiplican? ¿Cómo se dividen? y ¿Estos números se pueden observar en la vida cotidiana?

Para el análisis de la información se clasificaron las respuestas de los estudiantes a partir de los obstáculos epistemológicos de Glaeser, o si pertenecen a algún otro tipo de obstáculo. Además, se intentó relacionar aquellos obstáculos con las representaciones del modelo COPISI utilizadas por los estudiantes.

Resultados y análisis de datos

En cada grupo se discutieron sobre los conocimientos que tenían sobre los números enteros, haciendo los conocimientos pertinentes a su nivel educativo. El grupo 1 representa a los 5 estudiantes de 7° Básico y el grupo 2 representa a los otros 5 estudiantes de 8° Básico. Los estudiantes se enumeran desde E1 hasta E10.

Ambas entrevistas se inician preguntando a los estudiantes ¿Qué es un número negativo? y ¿Qué ejemplos conocen? donde la respuesta principal fue “un número con un signo menos” y ejemplos de números como “menos cinco” o “menos trece”. Después se preguntó acerca de la negatividad del cero, cuestión que en ambos casos respondieron que no es posible, pues es neutro.

Luego se preguntó ¿Qué se les facilita o dificulta cuando trabajan con números enteros? Entre las respuestas se observa “por ejemplo menos nueve menos un número positivo tiene que cambiar el signo a suma y el otro número a la derecha negativo” (E4); “Es como confuso” (E1); “fácil el de la recta numérica” (E3); “Algunas veces no les entiendo (...) porque a mí se me hace más fácil con los números positivos que con los números negativos” (E5).

Al preguntar sobre la adición y sustracción de números enteros en el Grupo 1, estudiantes muestran algunos algoritmos propios de estas operaciones en sus palabras como “Cuando es menos menos, se cambia a más” o “Se restan, porque son de diferente signo” (E4) cuando se habla de la adición. Sin embargo, esto mismo provoca dificultades a estudiantes, pues uno comenta “Eso es lo que a mí me confunde, si se suma o se resta” (E1).

Cuando al grupo 2 se le pregunta sobre la multiplicación y división de números enteros, si bien la mayoría responde adecuadamente, se observó una confusión entre el algoritmo de estas operaciones con el de la suma y resta, pues entre las respuestas se observó “Si los dos son negativos se quedan con el mismo signo” (E7).

Ambas entrevistas se finalizan preguntando sobre las representaciones que conocen o utilizan en el aula para estos números, en el grupo 1 los estudiantes comentan acerca de representaciones concretas como el nivel del mar, deudas, temperatura y el uso de la recta numérica, mientras que en el grupo 2 los estudiantes prefieren el uso de representaciones simbólicas por sobre las concretas, agregando el hecho de que no fueron capaces de mencionar una representación de este último tipo cuando se les consultó, a excepción de la recta numérica.

Al analizar los obstáculos epistemológicos establecidos por Glaeser en las respuestas dadas por los estudiantes, no muestran graves problemas para trabajar en la recta numérica (Obstáculo 3), ni para identificar al 0 como neutro (Obstáculo 4). Tan solo se puede identificar la dificultad para dar un sentido a las cantidades negativas aisladas en estudiantes de 8° básico, pero esto se puede deber al abandono de representaciones concretas y utilizar en su mayoría representaciones simbólicas. Si bien los estudiantes de ambos cursos no parecen tener problemas con la implementación de representaciones abstractas, se puede inferir que, al menos en 8° Básico, el tratamiento de representaciones concretas se considera levemente para la enseñanza de los números enteros.

En ambas entrevistas se puede identificar a estudiantes a los cuales se les complica trabajar con los signos negativos. Está el caso de E7, quien confunde el algoritmo utilizado en la adición con el de la multiplicación de números enteros. Esta situación se clasifica como un obstáculo epistemológico, puesto que dicho estudiante aprendió a sumar y restar números negativos, pero al momento de tener que utilizar otro algoritmo para la multiplicación y división, los conocimientos del estudiante entran en conflicto debido a las similitudes que comparten.

También está el caso de E4, en sus respuestas se identifica que este no diferencia el signo operacional y el posicional perteneciente al número entero. Esto se puede asociar a que todavía no establece una diferencia entre ambos signos, quizás debido a que en sus conocimientos previos solo se consideraba el signo operacional. El considerar estos como iguales en su nivel actual no presenta problemas, puesto que en la adición se puede manejar adecuadamente. Sin embargo, esto resaltará como obstáculo cuando el estudiante deba aplica dichos conocimientos en potencias y polinomios, donde realmente esta diferencia de signos es importante.

Para finalizar el análisis, cabe destacar que en ambos grupos se mostraba un correcto uso de la recta numérica, y además la reconocían como una representación que facilitaba el aprendizaje de las operaciones con números enteros.

Conclusión

A partir de los resultados y los análisis realizados, se muestra que en los estudiantes surge un obstáculo epistemológico al momento de aprender sobre la multiplicación y división de números enteros, pues este algoritmo de resolución entra en conflicto con el utilizado para la adición y sustracción. También se puede observar que los estudiantes trabajan los signos operacionales y posicionales de manera indistinta.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser, se puede concluir que los estudiantes no presentan estos problemas en la actualidad. Estos obstáculos se encontraron en la construcción de los números enteros, por lo que quizás sea más pertinente trabajar con estudiantes que se encuentren recién aprendiendo sobre estos números.

Además, el uso de representaciones no se considera como el causante de obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes, sino más bien se observa que el uso de estas (como la recta numérica) facilita la visualización y la enseñanza de los números enteros.

Los resultados obtenidos permiten tomar conciencia de las posibles dificultades que pueden desarrollar los estudiantes, lo cual es relevante para un mejor desarrollo de técnicas y didácticas para la enseñanza de los números enteros. Además, estos datos pueden servir como referencias para futuras investigaciones cualitativas y cuantitativas relacionadas con la enseñanza de los números enteros.

Estos resultados se utilizarán como base para un futuro, pues como se mencionó, este estudio se continuará posteriormente, esto con el fin de verificar y profundizar los datos obtenidos sobre los obstáculos que se evidencian en el aprendizaje de los números enteros.

Referencias y bibliografía

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal (1ª edición).

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Bruner, J. S. (1969). Hacia una teoría de la instrucción. Ciudad de México, México: Unión Tipográfica Editorial HispanoAmericana.

Cid Castro, E., & Brousseau, G. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan https://zaguan.unizar.es/record/112529 .

Glaeser, G. (1983). *Une science naissante: la didactique expérimentale des mathématiques*. Séminaire de Philosophie et Mathématiques, (14), 1-12.

Ministerio de Educación (2016). *Bases Curriculares Séptimo Básico a Segundo Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Muñoz Cornejo, P. (2019). *Análisis de números enteros en textos escolares ministeriales de séptimo y octavo año básico: 2009-2018*. [Tesis de Magister, Universidad Alberto Hurtado]. Repositorio de la Universidad Alberto Hurtado https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/25951

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71):158-180.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. *Avances en matemáticas educativas teorías diversas no. 8,* 121-135.