
# Resolución de problema que involucran Cónicas mediado por el GeoGebra

Maritza **Luna** Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
luna.m@pucp.edu.pe
Elton John **Barrantes** Requejo
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
ejbarran@pucp.edu.pe

## Resumen

El presente trabajo aborda la aplicación de actividades en torno a la enseñanza de cónicas, realizadas de manera síncrona con estudiantes del primer semestre de una universidad peruana. El objetivo es presentar los avances del análisis de las respuestas obtenidas por los alumnos, donde se motivó el uso de la tecnología para la visualización, de manera dinámica, de la representación geométrica de la solución de problemas que involucran familias de cónicas. Para la metodología del análisis de dichas respuestas se utiliza herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Los resultados alcanzados nos permiten promover una reflexión didáctica sobre el estudio de las cónicas y la incorporación de la tecnología como apoyo de la representación.

*Palabras clave*: Resolución de problemas; Cónicas; GeoGebra; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Enseñanza virtual.

## Introducción

Actualmente experimentamos un cambio de metodologías de la enseñanza, debido a la virtualización de los servicios educativos, por motivos de la coyuntura nacional e internacional a causa de la pandemia de Covid-19, según Ray y Srivastava (2020). En el caso particular del curso de Geometría Analítica y Algebra Matricial (AMGA), del área de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), se viene dictando de manera sincrónica, mediante la plataforma Moodle-Paideia proporcionada por la universidad. En este trabajo presentamos una experiencia didáctica sobre resolución de problemas de cónicas, donde se debe tener en cuenta la identificación de las ecuaciones y gráficas de las diversas cónicas, como la elipse, hipérbola, parábola o circunferencia. El objetivo es presentar los avances del análisis a las soluciones de los problemas presentados por los estudiantes, para lo cual se apoyaron de la tecnología que sirvió como ayuda para la visualización y representación geométrica de dichas soluciones. Para lograr el objetivo se plantean algunos problemas de cónicas en contextos vinculados a ecuaciones. El análisis de las soluciones presentadas por los alumnos se realiza a la luz de algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuyos resultados obtenidos nos permiten identificar y explicitar dificultades que los estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería presentan al describir la expresión matemática de las cónicas. Para así promover una reflexión didáctica sobre la resolución de problemas que involucran cónicas, en profesores de matemática de educación secundaria o superior en ejercicio, o en formación inicial.

El estudio de las cónicas es abordado desde la educación media, donde se percibe de alguna manera las dificultades en su aprendizaje, como sostienen Fernandes (2021), Lopes (2014), entre otros investigadores. Sin embargo, en el nivel universitario las dificultades del estudio de cónicas se atenúan, por ejemplo el estudio de la elipse como indica Leon (2014), se logra en parte mejorar con los procesos de instrumentalización de la elipse y sus propiedades que son abordadas mediante secuencias de actividades y aplicadas a un grupo de estudiantes de arquitectura, mientras que en la formación de profesores, ante esta dificultad o imprecisión, Benito (2019) propone un recorrido de estudio e investigación con base en la TAD para cónicas partiendo de un problema real, logrando resultados positivos en ese grupo de estudiantes. Además, las investigaciones de Benito (2019) y Fernandes (2021) presentan un estudio epistemológico y una revisión bibliográfica del objeto matemático cónicas, lo que permitió explicitar los modelos en que presenta el estudio de dicho objeto.

La resolución de problemas será analizada con la Teoría Antropológica de lo Didáctico por Yves Chevallard, que surgió a partir de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991). Según Chevallard (1999) toda actividad realizada está conformada por una triada: el objeto (O), las personas (X) y las instituciones (I), en nuestro caso el objeto son las cónicas, las personas son los alumnos de Álgebra Matricial y Geometría Analítica (AMGA) de una sección del primer ciclo en la institución PUCP. Además, la TAD está basada en la noción de organización praxeológica o praxeología. Para el autor, una praxeología, está formada por una teoría (Θ), que fundamenta las tecnologías ($\theta$), que a su vez justifican las técnicas ($\tau$) las cuales sirven para resolver tareas (t) de un determinado tipo de tareas (T). De modo que una praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$ está dividida en dos bloques, el bloque práctico-técnico, [T/τ], y el bloque tecnológico-teórico [θ /Θ].

Además, se tiene en cuenta que las praxeologías que incluyen un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM es la encargada del estudio de la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnologías y teoría. La OD observa el modo en que estas situaciones fueron constituidas, por medio de momentos de estudio. Según el grado de complejidad que se presentan en las componentes de las praxeologías se clasifican en: Organización Matemática Puntual (OMP), que considera un tipo de tarea; Organización Matemática Local (OML), que deriva de la integración de varias praxeologías puntuales que atienden a una misma tecnología; Organización Matemática Regional (OMR), obtenida de la articulación de praxeologías locales referentes a la misma teoría matemática; y Organización Matemática Global (OMG), que surge de la unión de diferentes praxeologías regionales, a partir de la integración de diversas teorías.

## Método

Nuestra investigación envuelve la realización de un análisis de las actividades solicitadas siguiendo los procesos de las contribuciones de la TAD para analizar y determinar qué tareas, técnicas y tecnologías son aplicadas. Este análisis permitirá identificar una organización matemática y de qué tipo es, para identificar un modelo praxeológico y una organización didáctica para la enseñanza

## Desarrollo de la experiencia

La experiencia didáctica se realizó con un grupo de 30 estudiantes ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería. Se desarrolló de manera virtual y por la plataforma Zoom. La sesión se divide en dos momentos, en un primer momento consideramos un trabajo individual, donde se propone un problema a los estudiantes y se les da un tiempo para que lean y resuelvan a mano; en un segundo momento, proponemos un trabajo mediado por el GeoGebra donde se le pide a cada estudiante que comente su proceso de solución o lo escriba en el chat. A modo de ejemplo, mostramos un problema propuesto.

A continuación, presentamos la tarea $(t_1)$ que consiste en un problema sobre cónicas, que tiene por objetivo que los estudiantes para resolver, debe tener en cuenta tecnologías como, por ejemplo: la definición de cónica, elementos característicos de cada tipo de cónica y la identificación de sus ecuaciones que las representan.

$(t_1)$ **Problema 1**

Considere la familia de cónicas:

$$\mathcal{C}_k: \frac{x^2}{9+k} + \frac{y^2}{4+k} = 1,$$

donde $k \neq -9$ y $k \neq -4$.

A) $(t_{11})$ Halle las condiciones que debe cumplir $k$ para que la cónica $\mathcal{C}_k$ no sea el conjunto vacío.
B) $(t_{12})$ Halle los valores de $k$ para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una elipse.
C) $(t_{13})$ Halle los valores de $k$ para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una hipérbola.
D) $(t_{14})$ Reflexione acerca de los vértices y focos de las cónicas.

En la figura 1 se muestra la solución propuesta por el estudiante 1.

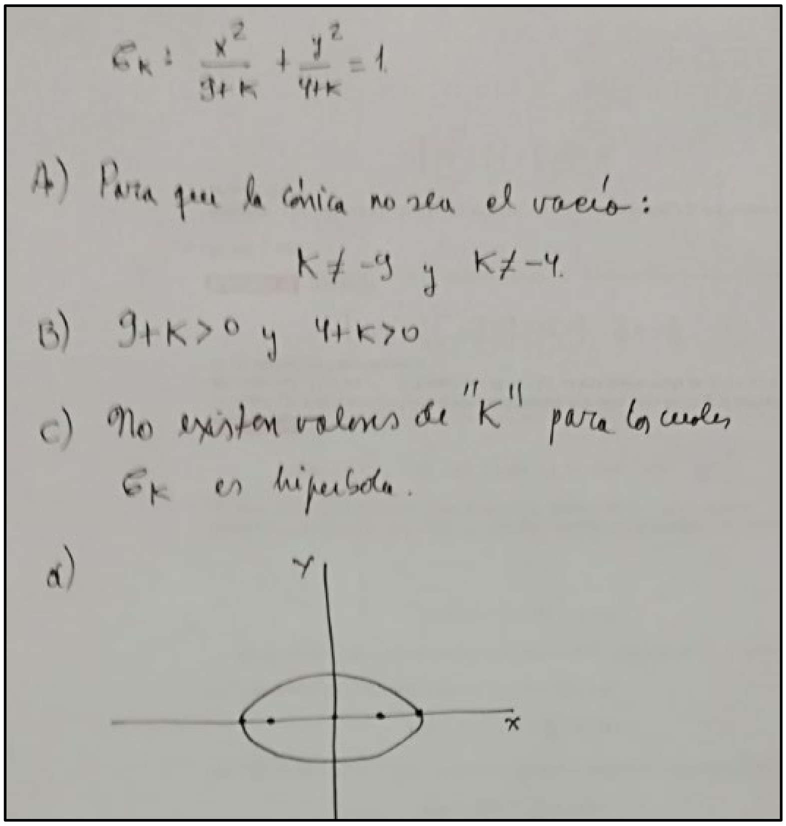



*Figura 1.* Solución del alumno 1

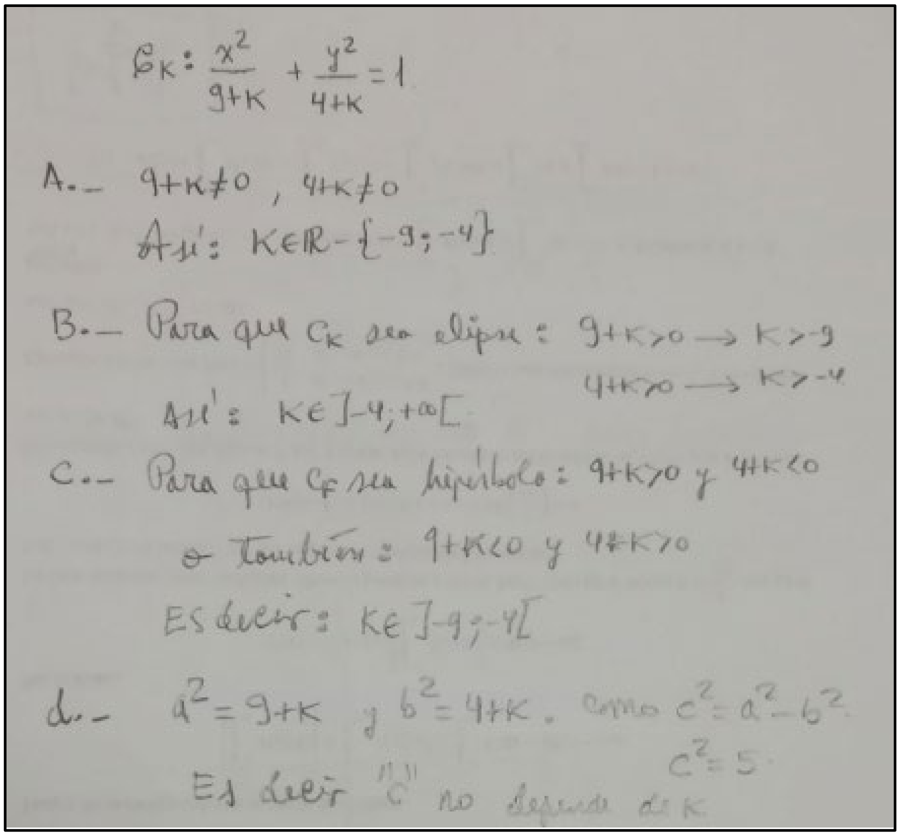
En la solución del estudiante se aprecia lo siguiente:

Para el item A $(t_{11})$ al estudiante le faltó analizar la existencia de la ecuación, es decir si k<-9, cuando la ecuación no tiene sentido. El estudiante no muestra ningún esbozo de gráficas ni justificación a su respuesta. Por tanto, la técnica $\tau$ que utiliza se restringe solo conocer $\theta$ la ecuación de la elipse.

En el item B $(t_{12})$ , el estudiante analiza de manera independiente los denominadores. Lo que evidencia un error en la resolución del problema, es decir nuevamente la tecnología $\theta$ es la ecuación de la elipse. Faltó tener en cuenta la hipérbola y le conduce a dar incorrectamente el item C $(t_{13})$.

En el item D $(t_{14})$ falta analizar los elementos de las cónicas. Podemos ver que solo representa la elipse, entonces faltó analizar los valores que toma k y no hay justifica con propiedad alguna la técnica $\tau$ para representar la elipse.

Seguidamente tenemos la solución de propuesta por el estudiante 2 que se muestra en la figura 2.


$C_K: \frac{x^2}{9+K} + \frac{y^2}{4+K} = 1$

A.- $9+K \neq 0$ , $4+K \neq 0$

Así: $K \in \mathbb{R} - \{-9; -4\}$

B.- Para que $C_K$ sea elipse: $9+K>0 \rightarrow K>-9$

$4+K>0 \rightarrow K>-4$

Así: $K \in ]-4; +\infty[$

C.- Para que $C_F$ sea hipérbola: $9+K>0$ y $4+K<0$

o también: $9+K<0$ y $4+K>0$

Es decir: $K \in ]-9; -4[$

d.- $a^2 = 9+K$ y $b^2 = 4+K$. como $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 5$

Es decir "c" no depende de K

*Figura 2.* Solución del alumno 2

La solución del estudiante 2 notamos lo siguiente:

En A ($t_{11}$) de modo similar al estudiante 1 le faltó analizar la existencia de la ecuación y la técnica que utiliza es restringir el dominio y faltó analizar para cada valor de $k\epsilon\{-9,-4\}$.

En B ($t_{12}$) el estudiante responde correctamente.

En C ($t_{13}$) el estudiante responde correctamente.

En D ($t_{14}$) el estudiante intento para determinar los valores de c, pero no concluye el proceso y solo se limita a indicar que depende de k. Faltó concluir y determinar las coordenadas de vértices y foco.

Luego de analizar las soluciones propuesta por los estudiantes, se entrega a los estudiantes dos applets para que exploren de manera dinámica la solución del problema. En la figura 3 se muestra la elipse cuando el contador es k=-1.5.

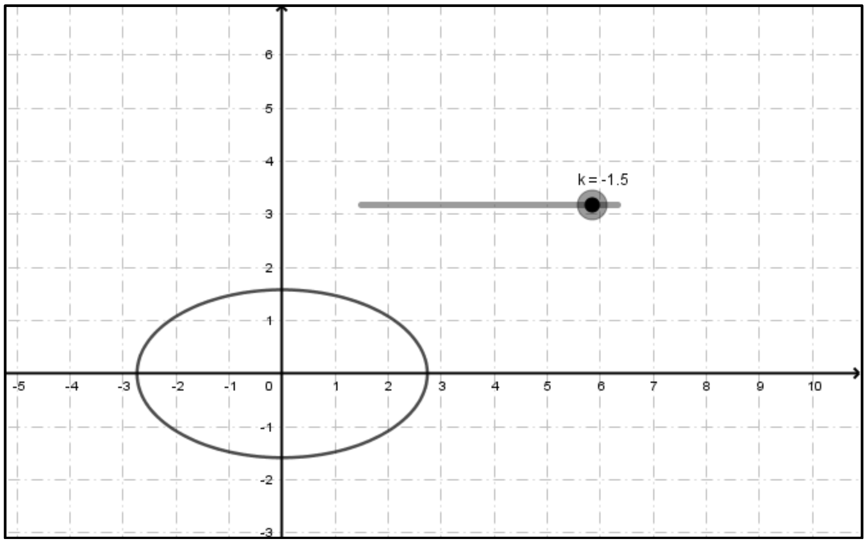



*Figura 3.* [Applet dinámico para explorar la solución del problema cuando k=-1.5.]

Mientras si k= -6.6 la cónica obtenida es la hipérbola como se puede ver en la figura 4.

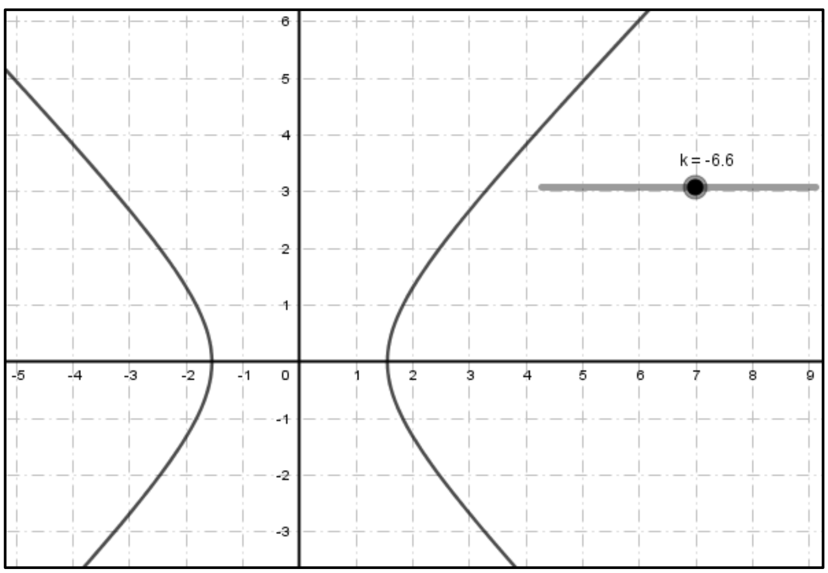



*Figura 4.* [Applet dinámico para explorar la solución del problema cuando k=6.6.]

Luego de que los estudiantes manipularon el applet y observar la solución de manera dinámica y geométrica del problema, se les solicita que nuevamente resuelva el problema y observamos que las respuestas a cada una de las preguntas planteadas empezaron a mejorar y generar discusión. Algunas de las respuestas de los estudiantes fueron:

- K no puede tomar valores menores a -9.
- Los focos de las familias de elipses e hipérbolas son los mismos.
- El eje focal de las familias de cónicas es el eje X.

En el siguiente Cuadro 1 se describen las técnicas y tecnologías que podían seguir los estudiantes.

**Cuadro 1**
*Análisis de técnicas y tecnologías para la Tarea 1.*

| **Subtareas** | **Técnicas ($\tau$)** | **Tecnologías ($\theta$)** |
|---|---|---|
| ($t_{11}$) Halle las condiciones que debe cumplir k para que la cónica $\mathcal{C}_k$ no sea el conjunto vacío. | $\tau'_{11}$: Determinar las condiciones para el valor de k como expresión algebraica, luego analizar que k$< -9$ | Ecuaciones de cónicas |
| | $\tau'_{11}$ : Reemplazar algunos valores hasta identificar las expresiones matemáticas de cónicas, como en la figura 2. | Represente de la ecuación grafica de la cónica. |
| ($t_{12}$) Halle los valores de $k$ para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una elipse. | $\tau_{12}$: Considera valores k$> -4$ para asegurar que el denominador es siempre positivo. | Ecuaciones de cónicas |
| | $\tau'_{12}$: La manipulación considerando la representación gráfica permite obtener la condición que k$> -4$ | Represente de la ecuación grafica de la cónica. |
| ($t_{13}$) Halle los valores de $k$ para los cuales $\mathcal{C}_k$ es una hipérbola. | $\tau_{13}$: Considera $9 + k > 0$ y $4 + k < 0$ y obtiene $k \in ]-4, -9[$ | Ecuaciones de cónicas |
| ($t_{14}$) Reflexione acerca de los vértices y focos de las cónicas. | $\tau_{14}$: Considerando las formas particulares de las ecuaciones de cónicas debe hallar el foco y vértice para caso de cónica. | Condiciones de vértices y focos de cónicas |

*Fuente*. Los autores.

Luego de este análisis tenemos los siguientes resultados.

## Resultados

Trabajar con parámetros incluidos en la ecuación de una cónica es complicado para los estudiantes de los primeros ciclos de la universidad peruana. Esto se debe a que conforme cambian los valores del parámetro la forma de la cónica también cambia. Es decir, puede pasar de una elipse a una hipérbola o al conjunto vacío, dependiendo del parámetro. El análisis de las soluciones con la TAD evidencia la falta de técnica para resolver y analizar cada caso de cónica que puede surgir. El auxilio del applet ayuda en la visualización y permite alertar que faltó analizar los valores de k para responder la tarea.

## Conclusiones

Consideramos que la actividad de determinar condiciones para un cierto parámetro que forma parte de una ecuación de una cónica permite identificar el tipo de cónica, las características que distinguen a cada tipo de cónica complementan el análisis y apreciar las bondades de la tecnología para inferir soluciones y aplicar conceptos y propiedades relacionados al tema tratado.

Finalmente, esta experiencia permite a los docentes de educación superior a reflexionar, promover e incorporar el uso de tecnología en nuestra actividad académica.

La tarea mostrada, la solución permitió identificar dos procesos o técnicas, una que toma elementos de la Geometría Analítica y sustentado por las propiedades o tecnologías de dicha teoría. Por lo tanto, se tiene que la tarea puede ser resuelta por dos técnicas, una identificando la forma algebraica de la expresión matemática y la otra con apoyo de software observado la representación gráfica de cada cónica es decir se trata de una OML.

La modalidad virtual, con clases remotas mediante el Zoom y al ser realizadas a través de un computador, laptop o teléfono celular, donde se podía utilizar el GeoGebra, ayudó a comprobar sus soluciones realizadas a mano en papel y a la representación de las funciones tanto en la forma algebraica como gráfica. Las soluciones presentadas nos permiten reflexionar que no basta con tener un software sino hay que tener cuidado con la formalidad de la definición y propiedades para así obtener la respuesta correcta. El intercambio de ideas realizadas de manera grupal, compartiendo pantalla, contribuyó a la discusión, formular preguntas y a la vez a responder las dudas. Por último, la dificultad del trabajo virtual permitió el uso de las nuevas herramientas tecnológicas adecuados para el registro de su información en la plataforma virtual del curso.

## Referencias y bibliografía

Benito, R. (2019). Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: o Ensino de Cônicas [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique : du savoir appris au savoir enseigné. Grenoble: la pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Math é Matiques, 19 (2), 221-265.

Fernandes, C. (2021). *Um Modelo Didático de Referência baseado em Atividades de Estudo e Investigação para o ensino de cônicas an Escola Básica* [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Leon, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú]

Lopes, S. (2014) Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico [Disertación de maestria, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]

Ray, S. y Srivastava, S. (2020). Virtualización de la educación científica: una lección de la pandemia de COVID-19. *Proteínas J Proteom* **11,** 77–80 https://doi.org/10.1007/s42485-020-00038-7