

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Estudio de una tarea sobre Función Exponencial con base en el Espacio de Trabajo Matemático

Jorge Luis **Vivas** Pachas

Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú

jorge.vivas@pucp.edu.pe

Jesús Victoria **Flores** Salazar

Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú

jvflores@pucp.pe

Tito Nelson **Peñaloza** Vara

Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú

npenalozav@pucp.pe

Verónica **Neira** Fernández

Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP
Perú

vneira@pucp.pe

Resumen

En el presente artículo se analiza el Espacio de Trabajo Matemático esperado en una tarea sobre función exponencial orientada a estudiantes de carreras de Humanidades. La investigación se desarrolla bajo la mirada del Espacio de Trabajo matemático (ETM) y tiene una metodología cualitativa. Dentro del análisis se evidencia la posible activación de las génesis y los planos verticales, así como los paradigmas que caracterizan el ETM esperado sobre función exponencial. Entre los principales resultados tenemos, en base a la producción matemática esperada, la activación de las *génesis semiótica e instrumental* y del plano vertical [Sem-Ins], así como identificar que se privilegia el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Palabras clave: Espacio de Trabajo matemático; Espacio de Trabajo Matemático esperado; carreras de Humanidades, función exponencial.

Introducción

La noción de función exponencial es de suma importancia en el currículo de Matemática de nuestro país, tanto en el nivel secundario como en el superior. En las carreras de Humanidades, esta función, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo: en Psicología se usa para medir el nivel de aprendizaje en un determinado tiempo; en Economía para analizar la inflación y capitalización; en Administración para analizar el interés compuesto; en Derecho Forense para entender el informe del médico forense acerca del tiempo descomposición de los cuerpos en caso de asesinatos; en Arqueología para determinar la edad de los artefactos como los huesos y otras fibras; etc. Todas estas aplicaciones justifican la enseñanza de la Función exponencial en carreras de Humanidad y es por ello por lo que nos enfocaremos en entender el Trabajo Matemático que realizan los estudiantes al resolver una actividad sobre esta función.

Investigaciones en Didáctica de la Matemática muestran la pertinencia de investigar este tema, especialmente con relación a los procesos la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

Con relación a investigaciones sobre función exponencial y el trabajo matemático, Vivas (2020) analizó el trabajo matemático personal de estudiantes al resolver problemas de función exponencial, la cual estuvo dirigida a estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades, siendo de corte cualitativo experimental. La recopilación de datos se obtuvo por medio de una tarea que contenía dos preguntas, las cuales generan en los estudiantes la necesidad de utilizar instrumentos para resolver las situaciones, y de esta manera el análisis de las acciones permite identificar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo que, según el autor, fueron los más predominantes.

Por otro lado, Baquedano (2021) realiza una investigación con estudiantes de tercero de secundaria en donde busca caracterizar el trabajo matemático desarrollado por ellos al enfrentarse a una tarea de modelación matemática para construir el concepto de función exponencial mediante la Ley de Enfriamiento de Newton. Las categorías de análisis fueron elaboradas a partir de la articulación entre el ciclo de Modelación Matemática (Borromeo-Ferri, 2010) y el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). En uno de los resultados obtenido destaca la activación del plano Semiótico Discursivo [Sem-Dis] en aquellas preguntas que permitían transitar por las distintas fases del ciclo de modelación, además, indica que el concepto de proporcionalidad inversa fue un obstáculo didáctico a la hora de construir el concepto de función exponencial en situaciones de modelación.

Respecto a la enseñanza de la función exponencial Arredondo (2020) analiza el espacio de trabajo matemático idóneo de los docentes en la enseñanza de la función exponencial en cursos de matemáticas de carreras de letras y ciencias humanas, en el dominio del análisis, mediante situaciones de modelación de interés compuesto, crecimiento y decrecimiento poblacional, y cuya metodología fue el estudio de caso. Mediante observación de las clases y el análisis de las producciones de los docentes, se reconoció la activación de las génesis y los tres planos verticales del esquema del ETM, los cuales privilegian los paradigmas del análisis Aritmético/Geométrico (AG) y del análisis Calculatorio (AC).

Función exponencial

Consideramos nociones extraídas de Stewart et al (2007) respecto a la función exponencial.

Definición: Para $a > 0$, la función exponencial con base a está definida por: $f(x) = a^x$. Para $a \neq 1$, el dominio de f es $\mathbb{R}$, el rango es $]0; +\infty[$ y la gráfica de f tiene una de las formas mostradas en la figura 1.

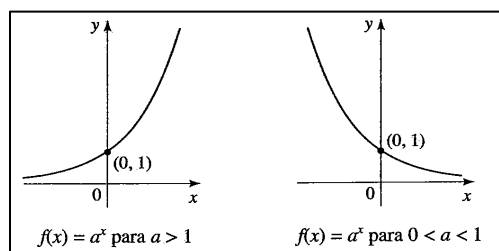


Figura 1. Formas de la gráfica de la función exponencial de base a

En la figura 2 mostramos las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para diferentes valores de la base a . Todas estas gráficas pasan por el punto $(0; 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. En dicha figura puede verse que existen tres tipos de funciones exponenciales $f(x) = a^x$: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a = 1$, $f(x)$ es constante; si $a > 1$, la función crece rápidamente, y mientras más grande sea la base, más rápido será dicho crecimiento.

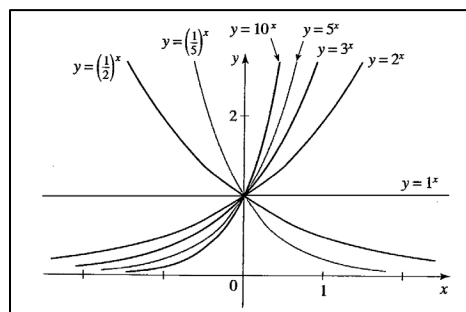


Figura 2. Formas de la gráfica de la función exponencial de base a

Aspectos teóricos y metodológicos

Espacio de Trabajo Matemático

De acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), el Espacio de Trabajo Matemático (en adelante ETM), es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en el contexto educativo y está basado en la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. El plano epistemológico está compuesto por tres componentes o polos a saber: *el representamen*, que se constituye de los registros de representación semiótica; *los artefactos*, que son elementos materiales o simbólicos utilizados y *el referencial teórico*, que está constituido por

las propiedades, los teoremas, las definiciones. El plano cognitivo se compone de los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante una *génesis semiótica*, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental*, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción y una *génesis discursiva* de la prueba, que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático. Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación dinámica de dos o incluso tres génesis.

Por ello, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales, que son el plano Semiótico Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].

Otro aspecto del ETM que se considera en la teoría es la noción de paradigma como “el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico” (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016, p. 7) en un contexto educativo. En relación con el dominio del Análisis, específicamente en el paradigma del Análisis Matemático estándar, se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Aritmético/ Geométrico (AG), que permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis Calculatorio (AC), en el que las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos y, Análisis Real (AR), que es caracterizado por una mirada global a las características de la noción matemática, con reglas que dependen de la topología usada.

Por otro lado, Henríquez-Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes aplican técnicas y conocimientos de acuerdo con el paradigma en cuestión. Esto permite reconocer la importancia que tienen las tareas en el sentido de promover el trabajo matemático de los estudiantes pues constituyen el medio para la resolución de problemas. En este trabajo de investigación, la noción de tarea está basada en la definición que propone Sierpinska (2004) y adaptada por Nechache (2017):

Una “tarea matemática” se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, que se sabe que los estudiantes pueden resolver de manera oportuna en un espacio de trabajo matemático bien definido (p. 72).

Asimismo, Gaona (2022) resalta la importancia que adquieren las tareas al afirmar que, si bien no forman parte del ETM, impulsan la activación del trabajo matemático. Con relación al diseño de tareas, Gaona (2022) sostiene que el ETM, por una parte, puede orientar el diseño de las tareas una vez definidos los objetivos, específicamente, quien diseña se puede preguntar si su tarea fomenta alguna o varias génesis o planos verticales, lo que permite hablar de ETM potencial de la tarea.

Aspectos metodológicos

La investigación que desarrollamos es cualitativa, porque se prioriza el análisis del fenómeno didáctico en cuestión. Por ello, para el análisis del trabajo matemático esperado, utilizamos el método diseñado por Kuzniak y Nechache (2018), en el que señalan que la acción matemática es objetivada y tomada del discurso escrito (producción escrita) u oral (entrevista, etc.) y que un episodio está constituido por una serie de acciones matemáticas que el estudiante realiza para llevar a cabo una tarea. Este método está constituido por dos etapas que permiten realizar un análisis pormenorizado de la producción matemática del estudiante. La primera etapa consiste en identificar las acciones matemáticas presentes en la producción matemática para luego agruparlas en episodios e interpretarlas en términos del ETM, es decir, identificar la activación de las génesis y los planos verticales. La segunda etapa consiste en dar una idea global de la circulación del trabajo matemático y emplea el esquema del ETM. En esta investigación, este método es adaptado con el propósito de analizar la producción matemática esperada y consideramos la primera etapa del análisis.

La tarea y su análisis

La tarea está pensada para ser llevada a cabo en una sesión de clase con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada en Lima, Perú. En esta clase, la resolución de problemas sobre función exponencial requiere el uso de su representación algebraica y gráfica. Por consiguiente, esta tarea consta de tres preguntas que favorecen el cambio de estos dos tipos de representación a partir de la interpretación de un problema extra matemático. Es así que, en la presente investigación, se analiza el Espacio de Trabajo Matemático esperado en la resolución de la tarea (ver figura 3).

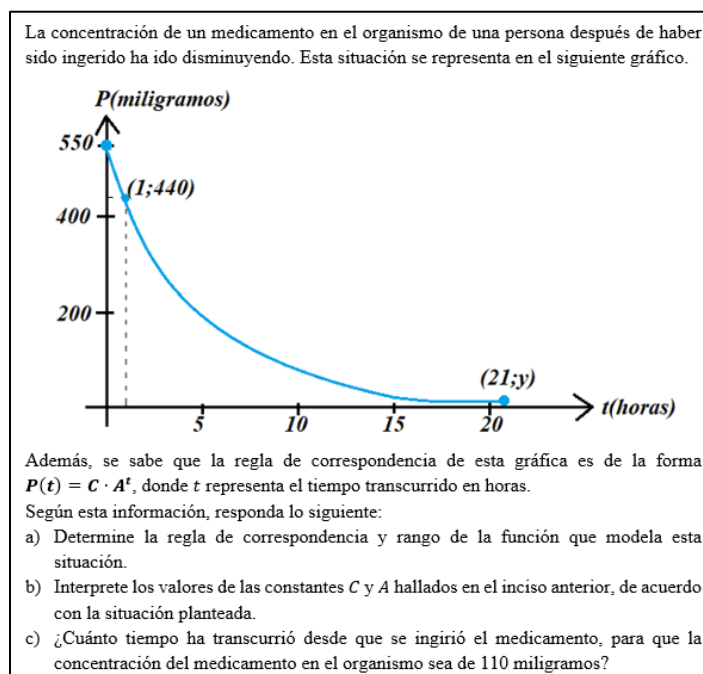


Figura 3. Tarea sobre función exponencial

ETM esperado y su análisis

En la solución propuesta que se considera, es posible identificar cinco episodios (E). Para el ítem a, en el primer episodio (E1) se determina la regla de correspondencia. Luego, a pesar de que no se solicita determinar el dominio, los estudiantes entienden que la regla de correspondencia queda plenamente establecida en la medida que esté acompañada de su dominio. En ese sentido, en el segundo episodio (E2) se determina el dominio y en el tercer episodio (E3) se determina el rango. Por su parte, en el ítem b, que consiste en la interpretación de las constantes, se constituye el cuarto episodio (E4). Finalmente, en el ítem c, el quinto episodio (E5) se resuelve una ecuación exponencial.

Análisis para el ítem a. En el E1, se espera que el estudiante identifique, en la representación gráfica de P , los dos puntos de paso que permitan determinar el valor de las constantes C y A . Para ello, se usa el modelo $P(t) = C \cdot A^t$ y se reemplazan las coordenadas de los puntos de paso, del siguiente modo: $(0; 550) \rightarrow P(0) = 550 \rightarrow C \cdot A^0 = 550 \rightarrow C = 550$ y $(1; 440) \rightarrow P(1) = 440 \rightarrow 550 \cdot A^1 = 440 \rightarrow A = 0,8$.

En términos del ETM, la representación gráfica de los puntos $(0; 550)$ y $(1; 440)$ es tomada como *representamen* y su identificación como puntos de paso de la representación gráfica de P expresa un proceso de *visualización*, lo cual evidencia la activación de la *génesis semiótica*. Luego, la regla de correspondencia es usada como *artefacto simbólico* y realiza un proceso de *construcción* para obtener el valor de las constantes C y A . Esto da cuenta de la activación de la *génesis instrumental*. En consecuencia, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Por otro lado, en el E2, se espera que el estudiante reconozca a las abscisas de los puntos extremos de la representación gráfica de P como los extremos del intervalo que representa su dominio, es decir, $[0; 21]$. En el ETM, esta acción matemática evidencia la activación de la *génesis semiótica*.

Asimismo, en el E3, se espera que el estudiante determine el valor de la ordenada del punto de paso $(21; y)$, el cual constituye el extremo inferior del intervalo que representa su rango. Para ello, se usa la regla de correspondencia: $(21; y) \rightarrow y = P(21) = 550 \cdot 0,8^{21} \approx 5,07$.

Dentro del ETM, la representación gráfica del punto $(21; y)$ es tomada como *representamen* para realizar un proceso de *visualización* que permite identificarlo como punto de paso de la representación gráfica de P , dando lugar a la activación de la *génesis semiótica*. En seguida, la regla de correspondencia es empleada como *artefacto simbólico* para obtener el valor de y mediante un proceso de *construcción* que se traduce en la activación de la *génesis instrumental*. Estas acciones son reflejadas en la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Análisis para el ítem b. En el E4, para la interpretación de $C = 550$, se espera que el estudiante reconozca al valor de 550 como imagen de $x = 0$, mediante la función P . En el ETM, esta acción matemática da lugar a la activación de la *génesis semiótica*.

Por otro lado, para la interpretación de $A = 0,8$, se espera que el estudiante determine en qué porcentaje varía la concentración del medicamento en el organismo con relación a una unidad de tiempo anterior, es decir $(0,8 - 1)\% = -20\%$.

En términos del ETM, las operaciones aritméticas son usadas como *artefactos simbólicos* y realiza un proceso de *construcción* para obtener un porcentaje, lo cual manifiesta la activación de la *génesis instrumental*. Luego, el signo negativo del porcentaje es tomado como *representamen* para ser interpretado como una disminución, mediante un proceso de *visualización*. Ambos procesos permiten evidenciar la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Análisis para el ítem c. En el E5, se espera que el estudiante identifique al valor de 110 como imagen de algún t , mediante la función P . Dentro del ETM, esta acción matemática revela la activación de la *génesis semiótica*. Posteriormente, condición $P(t) = 110$ se constituye en el planteamiento de la ecuación exponencial $550 \cdot 0,8^t = 110$.

Para resolverla, las operaciones producto o cociente son tomadas como *artefactos simbólicos* y realiza un proceso de *construcción* para obtener la ecuación equivalente $0,8^t = 0,2$. Es decir, se produce la activación de la *génesis instrumental*. Finalmente, las propiedades del logaritmo son empleadas como *artefactos simbólicos* para realizar un proceso de *construcción* que lo lleva resolver la ecuación. Esta acción evidencia la activación de la *génesis instrumental* y, en consecuencia, la activación del plano vertical [Sem-Ins].

Finalmente, la producción matemática esperada involucra un trabajo matemático que se sitúa en el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG). Esto, debido a que en la resolución de la tarea se consideran interpretaciones que tienen su origen en los cálculos obtenidos o que surgen dentro de su propio contexto, por ser una tarea extra-matemática.

Consideraciones finales

El análisis de la producción matemática esperada permite conocer cuáles serían los procesos y componentes (cognitivas y epistemológicas) involucrados en la resolución de la tarea presentada. Estos procesos y componentes, identificados a partir de la interpretación de las acciones matemáticas, caracterizan el Espacio de Trabajo Matemático esperado en la resolución de la tarea. En ese sentido, en esta producción matemática solo se reconoce la activación de las *génesis semiótica e instrumental*. Esto debido a que resolución de la tarea solamente demanda procesos de *visualización y construcción*. Además, la activación de ambas génesis describe la articulación de procesos en los cuales se privilegian la identificación y exploración de los objetos, desarrollando una competencia asociada al descubrimiento, lo cual evidencia la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Asimismo, en la producción matemática esperada se describe un trabajo matemático que se posiciona en el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Por otro lado, el análisis de la producción matemática esperada, bajo la mirada del ETM, fortalece la pertinencia de este marco como herramienta teórica a fin de caracterizar el trabajo matemático en la resolución de tareas, debido a que su uso permite describir y organizar las articulaciones entre componentes epistemológicas y cognitivas.

Agradecimiento

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA y por el apoyo brindado.

Referencias y bibliografía

- Arredondo Rivas, R. A. (2020). Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/17661>
- Baquadano, A. C. (2021). Construcción de la función exponencial a partir de la ley de enfriamiento de Newton. Comisión organizadora, 86. Recuperado de: <https://www.sochiem.cl/wp-content/uploads/actas-jnem-2021-santiago-xxiv-ucsh.pdf#page=96>
- Gaona, J. (2022). Diseño de tareas en un sistema de evaluación en línea, una mirada desde la teoría de espacios de trabajo matemático. *PädiUAQ*, 5(10), 1–18. Recuperado de: <https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/issue/view/67/74>
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime*, 17(4), 9–10. Doi: <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.
- Montoya, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. En *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 739-754. Recuperado de: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/Images/MWS-ZDM.pdf>
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique Et De Sciences Cognitives*, 19, 67–90.
- Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007) Introducción al Cálculo. Editorial Thomson, Buenos Aires (1ra ed), 261-263.
- Vivas-Pachas, J. L. (2020) Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre función exponencial. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104>