XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Actividades de demostración matemática para promover aprendizajes en Geometría

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Universidad de Lima
Perú
eadvincu@ulima.edu.pe
Emma **Carreño**
Universidad de Piura
Perú
emma.carreno@udep.edu.pe
Flor **Hau** Yon
Universidad de Piura
Perú
flor.hauyon@udep.edu.pe
Isabel **Torres** Cespedes
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ulima.edu.pe

Resumen

Abordar la demostración matemática permite ir más allá de hacer evidente la validez de un teorema matemático o del descubrimiento de uno nuevo, lo que favorece el pensamiento lógico del individuo pues requiere una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la demostración. Este taller tiene por objetivo desarrollar actividades de demostración matemática con profesores y estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. Las actividades se diseñan en base al modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y buscan promover el aprendizaje de la geometría. La metodología del taller es teórico-práctica, a través de actividades individuales y grupales que promuevan la elaboración y validación de conjeturas, así como el desarrollo de argumentos matemáticos. Entre los resultados se espera que los participantes logren realizar demostraciones geométricas usando diferentes tipos de razonamiento y métodos de demostración.

Palabras clave: Demostración matemática; aprendizaje; geometría; profesores de primaria y secundaria; modelo MTSK; formación docente.

Introducción

La demostración es una actividad que resulta compleja tanto para profesores como para estudiantes. De allí nuestro interés en proponer actividades de demostración con docentes que permitan una reflexión sobre la importancia de ellas en la práctica matemática. Entre las dificultades que suelen presentar las demostraciones matemáticas tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, se tienen: escaso razonamiento lógico, confusión entre explicación y demostración, pensar que demostrar es hacer una simple verificación (o justificación), deficiencia de conocimientos que no permiten la explicación oral y/o verbal de una demostración, entre otras (Alvarado y Gonzáles Astudillo, 2009).

The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) señala la importancia de incluir en el currículo de todos los niveles educativos los procesos de razonamiento y demostración; promoviendo actividades que lleven a estudiantes a formular conjeturas y desarrollar argumentos matemáticos y demostraciones donde utilicen diversos métodos de demostración y tipos de razonamiento. (Alfaro et al., 2019). Asimismo, en el Currículo Nacional peruano se plantea desarrollar la capacidad de *argumentar afirmaciones*, que promueve que los estudiantes elaboren afirmaciones sobre la validez de relaciones haciendo uso de las demostraciones que evidencien su solvencia conceptual. Se señala específicamente, que en el nivel primario los estudiantes sepan explicar y justificar sus afirmaciones y/o sus procesos de resolución matemática; y en el nivel secundario, justifiquen mediante ejemplos y contraejemplos, que comprueben o descarten la validez de afirmaciones y en el nivel destacado (nivel más alto) debe sustentarlas a través de demostraciones o argumentos. Se observa que, para llegar a realizar demostraciones se requiere seguir una secuencia progresiva que incluye: procesos de razonamiento, deducción, inducción, generalización, justificación, etc. dependiendo del nivel educativo en que se trabaje. Por esta razón, es fundamental que los profesores tengan un conocimiento sólido de esta práctica matemática, su naturaleza, funciones y constitución para enseñarla de forma efectiva (Vicario y Carrillo, 2005).

Por otro lado, Hanna y De Villiers (2008, citado en Alsina, 2018) en un documento de trabajo para la International Commission on Mathematical Instruction mencionan que: “Dado que las demostraciones son el corazón de las matemáticas, es fundamental que tengan un papel más relevante en las aulas, para que así se mantenga la conexión entre las matemáticas escolares y las Matemáticas entendidas como disciplina” (p. 20). También señalan lo siguiente:

> […] para los matemáticos, una demostración es mucho más que una sucesión de pasos correctos. Es, fundamentalmente, una concatenación de ideas e intuiciones cuyo objetivo es alcanzar la comprensión matemática: entender por qué una afirmación es cierta. Por tanto, el reto para los educadores es fomentar el uso de la prueba matemática como método para certificar no sólo que algo es verdad, sino también por qué es verdad (p. 20).

En la misma línea, Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012) señalan que las demostraciones conllevan a un amplio entendimiento de los conceptos matemáticos y tienen el potencial de contribuir a que los estudiantes desarrollen estrategias, métodos y herramientas para la resolución de problemas.

Demostraciones matemáticas

En la literatura revisada, encontramos que en matemática los términos demostración, prueba, demostración matemática o demostración formal se suelen usar como sinónimos. Sin embargo, en educación matemática no es frecuente que tengan exactamente el mismo significado, incluso, muchas veces un mismo término se usa con significados diferentes (Balacheff, 2000).

Alfaro et al. (2019) señalan que el concepto de demostración depende del contexto (la vida cotidiana, las matemáticas y la educación matemática) en el que se trabaje y esto hace que exista una diversidad de estos. Para estos autores, la demostración es un proceso de razonamiento de forma que cada una de ellas es un axioma o una consecuencia de fórmulas precedentes, mediante reglas de inferencia; cuyo objetivo principal es el de validar el conocimiento matemático. Indican los siguientes tipos de demostraciones: directas formales cuando se basan en las reglas de inferencia y se justifican cada una de las proposiciones; y directas informales cuando no se indican las justificaciones de las reglas de inferencia utilizadas; demostraciones indirectas que pueden ser de dos tipos: por contraposición (cuando se demuestra la proposición contrapositiva) y por reducción al absurdo cuando se demuestra una proposición contradictoria.

Por otro lado, Flores (2007) resalta la necesidad de construir esquemas argumentativos, es decir, formas en las que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa. Estos esquemas pueden ser de convicción externa, empíricos y analíticos. Los de convicción externa pueden ser autoritarios, se apoyan en afirmaciones hechas por alguna autoridad, el profesor, un libro de texto, simbólicos, utiliza un sistema de símbolos y lenguaje matemático de manera superflua y poco consistente y fácticos, se argumenta con base en hechos evidentes o anteriores a manera de explicación o justificación, como si fueran un algoritmo). Los esquemas empíricos, pueden ser inductivos los cuales se apoyan en hechos físicos o en dibujos, perceptivos se apoyan en experiencias de manipulación física, real o virtual para llevar a cabo la argumentación. Los analíticos se dividen en esquema de transformación, durante una validación se usa la transformación de los objetos mediante un proceso deductivo y una anticipación de los resultados de tal transformación y esquema axiomático, el individuo es consciente de que existen términos indefinidos y axiomas. Este autor resalta que el uso de estos esquemas no implica llegar a una conclusión válida y no deben confundirse con los tipos de demostración (contradicción, inducción, etc.).

Con respecto a las funciones de la demostración, De Villiers (1993) propone cinco funciones: la *verificación* que se refiere a la verdad y asegura la validez de una afirmación o definición; la *explicación* que lleva a profundizar en las razones por las cuales una afirmación es verdadera; la *sistematización* que conduce a la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas; el *descubrimiento* cuando la demostración sirve como un método de exploración, análisis, descubrimiento de nuevos resultados y la *comunicación* o transmisión de los resultados.

Ruiz (2014) aborda el trabajo con los teoremas y las demostraciones de proposiciones matemáticas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en todos los niveles de educación y manifiesta que generalmente los alumnos no recuerdan el rigor que debe tener una demostración ni tampoco pueden iniciar una demostración. Esto se debe a que generalmente se usa mucho la inducción como método para aseverar la veracidad de todas las proposiciones y conceptos que se usan en la escuela. En cambio, la deducción permite la construcción de la ciencia del conocimiento matemático.

Demostraciones geométricas

Aprender a demostrar proposiciones geométricas es un tema que necesita seguir siendo investigado. En este sentido, Lárez (2014) resalta la importancia de hacer demostraciones geométricas como resolución de problemas. Así mismo considera la demostración como una herramienta que puede proveer a los estudiantes de experiencias con rigor y formalismo matemático. Considera que la escuela debe proporcionar a los estudiantes oportunidades de aprender a demostrar, de estudiar demostraciones relevantes y de familiarizarse con el significado de la demostración en la construcción y la validación del conocimiento matemático.

Según Lárez (2014) en una demostración geométrica no solo deben presentarse axiomas y proposiciones ya demostradas, sino deben desarrollarse habilidades cognitivas como la comprensión, el razonamiento, el análisis, la evaluación, entre otras; tomando en cuenta que la geometría es el espacio propicio para fomentar el razonamiento lógico y el desarrollo de habilidades de representación, elaboración y validación de conjeturas, argumentación, necesarios en la resolución de problemas matemáticos y de la vida cotidiana.

En este sentido, Lárez (2014) propone un modelo para realizar demostraciones de teoremas geométricos, que consta de cinco fases: construcción de una figura que ilustre las propiedades geométricas de la proposición a demostrar; ubicación de información que ayude a decidir la elección de estrategias para realizar la demostración; producción de conjeturas a partir de la indagación y reflexión; organización de argumentos con una estructura lógica que permita concluir la demostración y evaluación constante de todo el proceso. Finalmente, para el proceso de demostrar utiliza la prueba de dos columnas como herramienta para sistematizar el conocimiento geométrico a través de una serie de proposiciones y razones que validen o justifiquen cada proposición.

Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK)

Este trabajo se fundamenta en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK (por sus siglas en inglés, Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) propuesto por Carrillo et al. (2018), en el que el conocimiento del profesor es especializado en tanto que es útil para su quehacer profesional. Este modelo analítico permite estudiar el conocimiento del profesor de matemática desde tres dominios: conocimiento matemático (MK), conocimiento didáctico del contenido (PCK) y dominio afectivo que permea todo el conocimiento del profesor.

En el dominio MK se considera el conocimiento matemático que el profesor usa en cualquier actividad ligada a su profesión. Incluye tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). El KoT se compone de cuatro categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones relacionados con el tema. El KSM incluye el conocimiento que el profesor posee sobre las conexiones entre elementos matemáticos y se compone de cuatro categorías: conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares. El KPM incluye un conocimiento ligado al conocimiento del profesor sobre las reglas de construcción de un nuevo conocimiento matemático. Se contempla el conocimiento sobre la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, las formas de validación y demostración, el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producción matemática, las prácticas particulares del quehacer matemático y las condiciones necesarias y suficientes para generar un nuevo conocimiento.

En el dominio PCK se considera el conocimiento de la matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje. Se divide en tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS). El KMT se centra en el conocimiento de teorías sobre la enseñanza del contenido, de recursos materiales y virtuales, y de diversas estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. El KFLM aborda el conocimiento del profesor acerca de cómo se aprende el contenido y comprende 4 categorías: teorías de aprendizaje personales e institucionalizadas, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales. El KMLS considera el conocimiento que el profesor posee sobre las orientaciones dadas por autoridades de diversos niveles acerca de qué debe aprender un alumno en cierto momento, por ejemplo, el conocimiento de estándares de aprendizaje. Este subdominio incluye tres categorías: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Nuestro taller se vincula con el conocimiento de la práctica matemática, específicamente de las demostraciones geométricas, considerando que dicho conocimiento debe formar parte de su conocimiento especializado (Carrillo et al., 2018). En este sentido, Ball y Bass (2009) señalan a la demostración como una práctica matemática clave en el conocimiento del profesor. Además, Knuth (2002) afirma que la enseñanza de la demostración requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la misma.

Metodología del taller

En este taller se proponen dos actividades de demostración para docentes de educación básica. En la primera, los participantes deben realizar la demostración del Teorema de Pitágoras; y en la segunda, se presentan soluciones realizadas por profesores en ejercicio a un problema relacionado con una generalización matemática, para que identifiquen características, tipos y funciones de la demostración, así como el conocimiento matemático evidenciado según el modelo MTSK.

La dinámica contempla una fase de trabajo individual, luego una socialización de resultados en pequeños grupos y finalmente una síntesis teórica con todos los participantes.

A continuación, se describe brevemente el desarrollo de las actividades planteadas.

Primera Actividad
Demuestra la siguiente proposición:
La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

Desarrollo de la primera actividad
Fase individual: 15 minutos
Cada participante realiza la demostración propuesta y responde las siguientes preguntas:
1. ¿Por qué ha elegido este tipo de demostración?
2. ¿Conoce otras formas de demostración distinta a la que ha realizado? Explique.
3. ¿Ha usado material concreto al realizar demostraciones? ¿Considera que son necesarios?
4. ¿Considera conveniente el uso de recursos tecnológicos para realizar demostraciones?
5. ¿Realiza demostraciones con sus estudiantes?
6. ¿La demostración que ha presentado la promueve en sus clases? ¿De qué manera?

Fase grupal: 40 minutos
Se forman grupos de 3 o 4 participantes.
En cada grupo se socializa lo desarrollado en forma individual.
En cada grupo se elige una demostración justificando su elección, la cual será presentada a todos los participantes.
En grupo responden las siguientes preguntas justificando cada una de ellas.
1. ¿Qué conocimientos matemáticos previos ha necesitado para realizar la actividad?
2. ¿Qué conocimientos matemáticos han usado al realizar la demostración?
3. ¿Qué temas matemáticos requieren el conocimiento del Teorema de Pitágoras?
4. ¿En qué situaciones podría aplicarse el Teorema de Pitágoras?
5. ¿Cómo presentaría la demostración a sus estudiantes?
6. ¿Considera importante que los estudiantes de educación básica realicen demostraciones? ¿Por qué?
7. ¿Qué potencial encuentra al proponer que los estudiantes realicen demostraciones?
8. ¿La demostración está incluida en los currículos oficiales de su país?
9. ¿Considera que realizar demostraciones matemáticas contribuye al logro de las capacidades matemáticas declaradas en el Currículo Nacional?

Fase de síntesis: 25 minutos
Cada grupo presenta la demostración elegida a todos los participantes y la sustenta.
Se realiza una síntesis teórica a partir de las respuestas dadas a las preguntas de la fase grupal.
Se entrega un resumen con los fundamentos teóricos involucrados que se usará en el desarrollo de la segunda actividad.

Segunda actividad

Analice las soluciones dadas por profesores[1] *al problema "Un torneo de ping pong" propuesto por Chevallard et al. (1997, p. 65).*

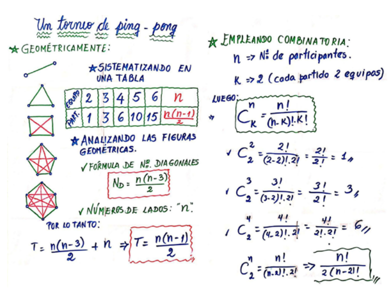
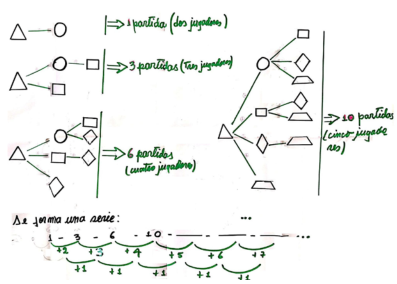
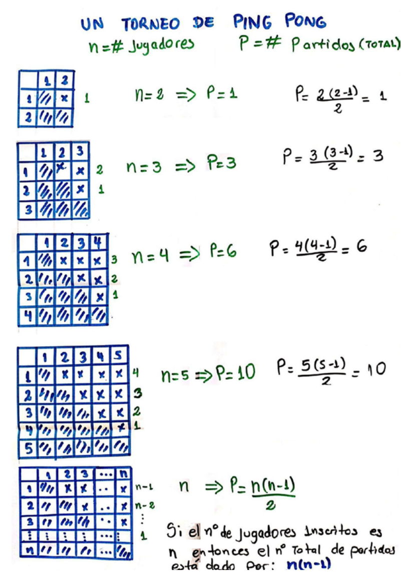
Un torneo de ping-pong

El Instituto organiza un torneo de ping-pong en forma de liga. La comisión organizadora debe decidir cuántos días durará el torneo, los horarios de los partidos, el número de mesas que necesitarán, el tipo de premios, etc. Dado que se dispone de un presupuesto limitado, hay que hacer un estudio previo de lo que costará la organización del evento. Las decisiones que hay que tomar dependen evidentemente del número de partidos que se jugarán en la liga, en la que todos los jugadores juegan contra todos los demás. Los organizadores dudan entre poner o no un límite al número de inscripciones, por miedo a que una avalancha de jugadores haga totalmente inviable la realización del torneo. Para ello, necesitan prever cuál será el número total de partidos que se jugarán a partir del número de jugadores inscritos.

Problema: Si en una liga de ping-pong juegan "n" jugadores, ¿cuál es el número total T de partidos que se realizarán?

Tabla 1

Soluciones realizadas por profesores al problema Un torneo de pin-pong.

Solución del profesor 1	Solución del profesor 2	Solución del profesor 3
		

Fuente: elaboración propia.

Desarrollo de la segunda actividad

Fase grupal: 15 minutos

En cada grupo, formado en la actividad 1, se desarrolla la actividad 2 tomando en cuenta la síntesis teórica recibida. El análisis de esta actividad requiere la identificación de las

[1] *Profesores participantes de una maestría en Didáctica de la Matemática para Educación Primaria.*

características de una demostración (construcción de una figura, elección de estrategias en función a información dada, elaboración de conjeturas, organización de argumentos con una secuencia lógica y rigurosidad matemática, forma de presentar la demostración), los tipos de demostración (directa formal, directa informal, indirecta por contraposición, indirecta por reducción al absurdo) y las funciones de la demostración (verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación) que se encuentran presentes en las resoluciones dadas.
Fase de sintesis: 15 minutos
Cada grupo socializa el trabajo desarrollado en grupo a todos los participantes.
Se realiza un cierre con comentarios finales.

Resultados esperados

En este taller se espera generar un espacio de reflexión entre los participantes en torno a la demostración como práctica matemática.

En la primera actividad se espera que los docentes reflexionen sobre su conocimiento acerca de las demostraciones matemáticas y los conocimientos matemáticos asociados, el tipo de demostración que conoce, los recursos que podría usar, su utilidad en diversas aplicaciones, las razones por las que los profesores las promueven o no en los distintos niveles educativos.

En la segunda actividad se espera que los participantes reconozcan los distintos tipos de demostración, reconociendo sus características y funciones a partir de la síntesis teórica consolidada en la primera actividad.

Finalmente, se espera que los participantes identifiquen los conocimientos matemáticos movilizados al elaborar sus argumentos respecto de las soluciones presentadas en cada actividad.

Referencias y bibliografía

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75.

Alsina, C. y Nelsen, R. (2018). *Demostraciones con encanto. Un viaje por las matemáticas elegantes*. Real Sociedad Matemática Española y Ediciones SM.

Alvarado, A. y González, M. (2019). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: Estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente.

Ball, D. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing Mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference, Universidad de California UCLA.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in* Mathematics *Education, 20*(3), 236-253.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas. *Educación matemática*, *19*, 63-98.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 61-88.

Lárez, J. (2014). Las Demostraciones Geométricas como Instancias de Resolución de Problemas. *Paradígma*, *35*(2), 183-198. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2014.p183-198.id543

Ministerio de Educación de Perú. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Ruiz, R. (2014). La enseñanza de la demostración geométrica en la escuela: retos. *EduSol*, *14*(46), 1-13.

Vicario, V. y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*, IX (pp. 145-152). SEIEM.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. y Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Springer.