XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Reconstrucción de escenarios de uso para la significación del Espacio Métrico

Maximiliano **Izzi** Prato
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México-Uruguay
maximiliano.izzi@cinvestav.mx
Julieta **Tejería** Russi
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México-Uruguay
julieta.tejeria@cinvestav.mx

Resumen

Se reporta una investigación de maestría que surge a partir de una problemática relacionada a la pregunta: ¿Qué significados tienen los objetos estudiados en la asignatura Topología? La visión desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, permitió la configuración de significados provenientes de prácticas asociados a algunos conceptos centrales que configuran esta rama de la matemática. Se propone que todo conocimiento matemático es parte de una construcción social con historia. En este sentido el trabajo realizado permitió identificar relaciones entre significados de medida-métrica-distancia con la axiomática del espacio topológico. En particular, se identifican significados de medida en el objeto espacio normado, y significados de distancia en el objeto espacio métrico, escenarios de posibles resignificaciones de estos en donde se señalan su uso y una epistemología de prácticas en función de cada contexto.

Palabras clave: Educación superior; Métrica; Socioepistemología; Topología.

Introducción y planteamiento de la problemática

Cantoral y Izzi-Prato (2021) mencionan que en institutos de formación de profesorados de matemática y universidades pedagógicas de Latinoamérica, se imparten cursos de Topología a los futuros profesores de matemática (Chile, Argentina y Uruguay). Además, es una asignatura que aparece en programas de formación de matemáticos y con influencia en carreras universitarias con perfiles matemáticos. Bastán *et al.* (2006, 2007) mencionan que, la centración en objetos abstractos que caracteriza a estos cursos de Topología, produce una percepción de falta de pertinencia de estos cursos en los estudiantes de profesorado de matemática, ya que posteriormente la mayoría se dedicarían a la enseñanza en educación secundaria o bachillerato. Es decir, sucede que el profesor en formación no percibe la aportación de este curso a su perfil profesional específico.

Bastán *et al.* (2006), realizan un estudio histórico epistemológico del origen de la Topología, y se lo contrasta con el saber enseñado en la formación del profesorado. Señalan que una definición como la que se muestra en la *figura 1* es ventajosa desde cierto punto de vista por su expresión minimalista y generalizadora, pero es desventajosa desde otro, sobre todo para la enseñanza, porque muestra un alto grado de opacidad en cuanto a los objetos a los que hace referencia y a los problemas, cuestiones o situaciones que permite abordar y por sobre todo a aquellos que le dieron sentido a su génesis.

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Figura 1. Definición de Espacio Topológico extraída de Munkres (2002). En los libros de Topología usualmente recomendados en los programas como pueden ser Kelley jonh L., (1955); Mendelson (1990); Munkres (2002) que coinciden con los planteamientos que hemos analizados materiales diseñados para profesores (a los que hemos podido acceder), se presenta la concepción de espacio topológico de la manera que se muestra (con apenas pequeñas variaciones entre una fuente y otra).

La interpretación que realizan Bastán et al. (2006), podría ser extendida a cualquiera de las nociones topológicas estudiadas en cursos de Topología, como pueden ser espacios métricos, continuidad, compacidad, conexión, completitud, etc. Las definiciones se mantienen de manera abstracta y genérica, opacando, como dicen los autores, los matices de los objetos. También identifican dificultades y obstáculos protagónicos en cuanto a la enseñanza de la Topología. Se reconoce una pérdida de significados geométricos de las nociones, se mantienen los temas estudiados a nivel de objetos puros, y las técnicas restringidas a la producción de demostraciones que dependen de la significación que cada estudiante pueda darle, “sin más razones que la coherencia lógica que mantienen (los temas) entre sí” (p.7). También se identifica que no se presenta problemas en contextos en donde los saberes involucrados puedan apreciarse con funcionalidad, no se dan instancias de exploración, sino que se presentan los temas desde las definiciones. Sobre el rol de los problemas planteados se menciona que: “aparecen al final de cada tema como aplicación, son complejos y aislados, tienen por objetivo hacer que el alumno adquiera heurísticas que tienen que ver con el trabajo en estructuras matemáticas” (p.7). Se concluye por parte de los autores que “el producto resultante del proceso de reconstrucción es una organización matemática estructural y formalizada, que constituye un “idioma nuevo”, sofisticado, complejo, del cual no se llega a hacer visible su imprescindibilidad.” (p.10)

Bastán et al. (2006); Espinoza, (2009) y Márquez García, (2018) referencian y argumenta que desde punto de vista histórico, el origen de la Topología está vinculado a una generalización de las nociones del Análisis Matemático. Al analizar los libros de texto y apuntes diseñados para los cursos, se puede observar que solamente en algunos casos, la introducción a los conceptos de Topología se da con una visión coherente a esta que plantean los autores (Hinrichsen & Fernández, 1977; Mendelson, 1990). Solamente en algunos casos, esta generalización se comienza con la introducción del objeto: *espacio métrico*. Con este, se generaliza la idea de medida (a través del concepto de *espacio normado*), para así poder generalizar teoremas y definiciones asociados al concepto de límite o continuidad. Usualmente se presenta una definición axiomática del *espacio métrico*, para luego presentar ejemplos de estos (*figura 2*), y concluir con definiciones generalizadas de conjuntos abiertos, entornos, límite, continuidad, en otros espacios que no sean únicamente $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea usual (aunque sí este caso aparece como ejemplo). En la obra de Frechét de 1906, en donde se reconoce uno de los orígenes de esta rama de la matemática, la idea de *espacio métrico* es protagónica.

> La problemática a partir de la cual surgen los espacios métricos está centrada en la necesidad de definir una distancia o métrica en espacios diferentes a los euclidianos. Frechet se plantea el problema de generalizar las técnicas utilizadas en los espacios euclídeos para reconocer la continuidad de una función definida sobre ellos, a espacios cuyo conjunto soporte no fuera ningún $\mathbb{R}^n$ como el espacio C_0 de las funciones continuas. Se planteó abstraer de la métrica euclídea las mínimas propiedades que deba verificar una métrica y que pudieran ser extendidas a un espacio cualquiera. En 1906 define (…) una nueva clase de espacios, a los que denomina conjuntos (E) de clase (V) en los que se da por primera vez una definición general de distancia. (Bastán et al., 2006, p10)

Respecto a los tipos de tareas

➢ **T_1: Verificar que ciertos objetos responden al modelo que provee la definición de espacios métricos.**

Probar que los siguientes son espacios métricos

a) *IR^n con la distancia euclídea*: $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ $\quad x=(x_1,\dots x_n)$ e $y=(y_1,\dots y_n)$

b) *(IR^n,d) donde* $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|(x_i-y_i)\right|$

c) *IR^n con la siguiente métrica* $d(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|x_i-y_i\right|$

d)

Sea X un conjunto, x, y en X

$$d_i(x,y)=\begin{cases}0 & si \quad x=y\\ 1 & si \quad x\neq y\end{cases}$$

e)

Sea A un conjunto cualquiera y $L(A)$ el conjunto de las funciones acotadas de A en IR. Sean f y g pertenecientes a $L(A)$. La aplicacion $d(f,g)=\sup_{x\in A}\left|f(x)-g(x)\right|$ *es una metrica*

Figura 2. Ejemplos de ejercicios para *espacios métricos.* Extraído de Bastán et al. (2007, p.8).

Raman-Sundstrom (2015) realiza un estudio histórico de la evolución de la noción de compacidad, que se origina en el análisis matemático, y se vuelve primordial en la topología. Se muestra claramente, cómo la noción evolucionó hasta una definición genérica funcional para cualquier espacio topológico, que fue buscada por la comunidad matemática, siendo la mayormente divulgada en la actualidad. A partir del análisis de este documento se observó cómo el afán de la generalización se sacrifican significados del concepto de compacidad que fueron importantes en la construcción social de dicha noción. Específicamente, la compacidad en espacios métricos tiene características particulares que pueden aportar significados que no se lograría únicamente con la definición genérica. Incluso en espacios métricos particulares, podrían aparecer significaciones y definiciones concretas al interpretar el concepto de compacidad (figura 3). Esto es coherente con la misma evolución conceptual de la topología, ya que los espacios topológicos se pueden considerar como una abstracción que generaliza las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados en espacio métricos.

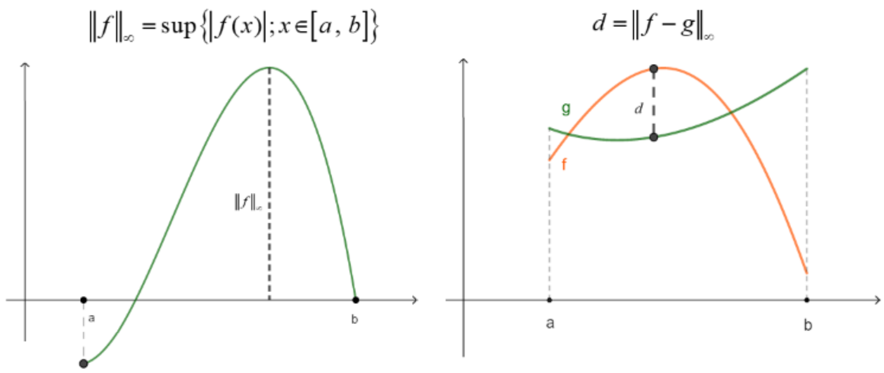

Figura 3. Métrica del supremo entre funciones continuas en un intervalo cerrado. Está, genera un espacio métrico en el cual un conjunto es compacto sí y sólo sí, es acotado cerrado y equicontinuo (Raman-Sundstrom,2015). Elaboración propia.

Estas pistas nos llevaron a enfocarnos en el concepto de *espacio métrico*, por estar ligado directamente a la consolidación de la Topología, y por involucrar conceptos de *medida* y *distancia,* que podrían significarse en escenarios reales a partir de su funcionalidad. Un objetivo de esta investigación fue, poder observar conexiones ente algunas de las nociones de la Topología, que son usualmente presentadas de manera muy abstractas, con prácticas sociales concretas. Creemos que esto, podría cambiar la percepción del profesorado de matemática con respecto a esta rama de la Matemática. De esta manera nos enfocamos al estudio de los *espacios métricos,* y sus posibles escenarios de significación mediante uso. Las preguntas que nos hicimos fueron las siguientes:

• ¿Qué rol tiene el concepto de *espacio métrico* en la Topología?

• ¿Por cuáles etapas de construcción social del conocimiento han transcurrido los saberes interrelacionados de *medida-métrica-distancia* para conformarse como pensamiento matemático avanzado? ¿Cómo se vinculan?

Vale la pena señalar, que estas preguntas se consolidaron en el camino de exploración y análisis, y no estuvieron determinadas desde un principio.

Marco Teórico

El marco teórico considerado para esta investigación es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (*TSME*) (Cantoral, 2016; Cordero *et al.*, 2015, 2022) . Esta teoría científica del campo disciplinar de la Matemática Educativa, está dentro del paradigma sociocultural de la disciplina y estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Considera que la *sabiduría humana*, se conforma tanto en el *saber sabio*, como en el *técnico* o *popular* (en una jerarquía horizontal en donde ninguno predomina) siendo una producción social con contexto y herencia. Se plantea que no considerar estas influencias socioculturales para intervenciones didácticas sería, en cierto sentido, desnaturalizar los propios procesos de construcción de saberes matemáticos.

La *TSME*, señala la existencia de un *discurso Matemático Escolar* (dME), que norma lo que se considera como correcto y lo que no en la configuración de la matemática escolar (Cantoral, 2016; Cordero et al., 2015). Este es de carácter ideológico, y se reproduce no solamente en libros de textos y programas oficiales (considerados como elementos objetivables del *dME*), sino que norma quehaceres tanto de los profesores como de los estudiantes y la manera que estos se relacionan con el saber matemático. La matemática, se presenta acabada, excluyendo las particularidades propias del pensamiento matemático de los estudiantes, instaurando un dominio epistemológico centrado en objetos formales, presentado en escenarios ficticios ajenos a la realidad del estudiante.

Cordero *et al.* (2022), consideran que el constructo *práctica social* en la Teoría Socioepistemológica, describe un sistema de complejidad en donde la dimensión social del saber matemático que involucra elementos como: la realidad, los usos del conocimiento, y en términos genéricos, la gente, se vinculan de manera interrelacionada involucrando las dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas del saber. La exclusión de la dimensión social del saber del dME, configura un *sujeto olvidado* por la matemática escolar. Es necesario recuperarlo, y un camino es la *problematización del saber* en un sentido socioepistemológico (Cantoral, 2016; Cantoral et al., 2014), para poder atender las problemáticas en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Consideraciones Metodológicas

Para desarrollar esta investigación, se realizó una *problematización del saber matemático* (Cantoral, 2016), según las cuatro dimensiones del saber: *didáctica, cognitiva, epistemológica y social.* A grandes rasgos*:* Para el análisis de la dimensión didáctica*,* se analizaron textos escolares que se identificaron con importancia histórica para el desarrollo de la Topología, reconstruyendo de ellos la relación entre *espacios métricos* y *espacios topológicos.* Para el análisis de la dimensión cognitiva, se revisó literatura específica del campo de la Matemática Educativa que nos diera información de las problemáticas en cuanto al aprendizaje y enseñanza de la Topología. Para problematizar la *dimensión epistemológica y social*, se recurrió a fuentes que hicieran viable una historización de la noción de *medida* (que antes ubicamos relacionada a la construcción del *espacio topológico*), de carácter epistemológico-filosóficas (Mari, 2005, 2003) y social-antropológicas (Angel et al., 2010; Cooperrider & Gentner, 2019; Espinoza et al., 2018; Gyllenbok, 2018; Kula, 1986). Esto permitió visualizar los procesos de construcción social de nociones de *medida-distancia* en la historia de las prácticas de la humanidad.

Consideramos que cuando se habla de decisiones metodológicas, se hace referencia a “toda elección que se toma para la realización de un proyecto de investigación, las cuales otorgan los aspectos particulares del estudio” (Torres-Corrales et al., 2020). Al comienzo de la investigación, no tuvimos definida toda una metodología a seguir, sino que mantuvimos un plan flexible, que se fuera adaptando a la nueva información que íbamos obteniendo a partir de los análisis que realizamos en las diferentes etapas, sin perder de vista los objetivos del proyecto.

De manera global, consideramos el planteamiento metodológico para las investigaciones desde la *TSME,* propuesto en (Montiel & Buendía, 2012)(*figura 4*). A lo largo de nuestro proyecto de investigación, hemos considerado para nuestra *problematización del saber* según las *dimensiones del saber*, elementos de la *epistemología histórica y filosófica*, procesos de *resignificación del saber*, en escenarios escolares, profesionales y cotidianos, además de un análisis del *dME*, y de procesos de institucionalización de saberes divulgados en las prácticas humanas en contextos diferenciados. Por esto, creemos que la propuesta metodológica que se señala en la *figura 4,* esquematiza de manera correcta la metodología empelada en este proyecto de investigación.

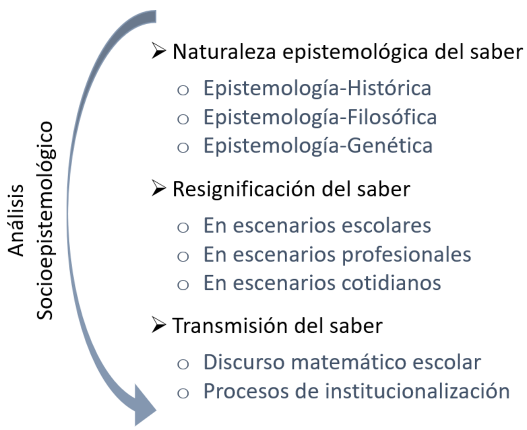

Figura 4. Consideraciones Metodológicas. Recuperado de Montiel y Buendía (2012, p. 68).

Resultados

Para la configuración de los resultados, se articula de manera coherente, a partir de la implementación de un proceso dialectico constante de la información obtenida a partir de cada uno de los análisis realizados. Los resultados se estructuraron de la siguiente manera:

• Se dio evidencias de que la construcción social de algunas *métricas* con mayor grado de complejidad, son producto de procesos de *resignificación progresiva* del saber (Cantoral, 2016), y que articulan y posibilitan la *comparación* específica de algunas *magnitudes* abstractas, como pueden ser: el *valor productivo de terrenos de siembra* (Kula, 1986).

• Se explicitan tres niveles de la práctica de *comparar*, con matices diferentes en cada uno. El primer tipo permite la construcción social de *unidades de medida,* el segundo permite la obtención de *medidas* de *magnitudes*, y el tercer nivel permite la expresar cercanía o lejanía en términos de la *magnitud* medida, es decir un concepto de *distancia* descentrado. En cada caso se explicitaron escenarios en donde se aprecian estas prácticas, que proveen significados de los saberes en función del contexto.

• Se planteó un análisis de los objetos *espacio normado* y *espacio métrico*, en las prácticas antes mencionadas. Se interpreta una estructura en las prácticas equivalente a la estructura en los objetos. Se toma la postura de que los segundos pueden ser una abstracción de los primeros, y se plantea como resultado teórico una Reconstrucción Racional Socioepistemológica que busca explicitar la relación entre *medida-métrica-distancia* y la Topología (*figura 5)*. Se identificaron resignificaciones del *espacio normado* y el *espacio métrico,* y un teorema en uso: *todo espacio normado genera un espacio métrico / en las prácticas en donde se institucionaliza un saber de medida se genera una noción descentrada de distancia.*

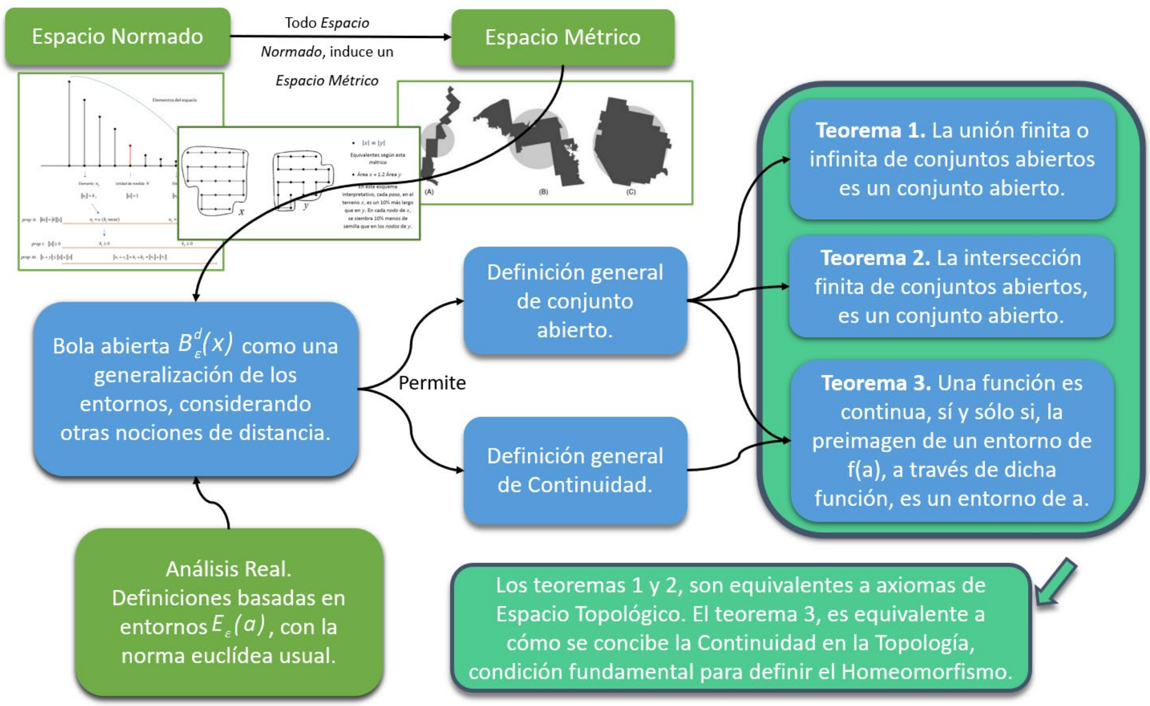

Figura 5. Esquema de la Reconstrucción Racional. Esquematiza conexiones entre espacio métrico y espacio topológico, y posibles significados provenientes de prácticas asociados a los espacios métricos. Extraído de (Izzi-Prato, 2021).

Referencias y bibliografía

Angel, S., Parent, J., & Civco, D. L. (2010). Ten compactness properties of circles: Measuring shape in geography. *Canadian Geographer, 54(4)*, 441–461. https://doi.org/10.1111/j.1541-0064.2009.00304.x

Bastán, M., Cuenya, H., & Fioriti, G. (2007). La Topología en la formación de profesores de matemática. En Ruiz (ed.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico,* (pp. 279–300).

Bastán, M., Cuenya, H., & Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática, 21*, 1–15.

Cantoral, R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento. Editorial Gedisa.

Cantoral, R., & Izzi-Prato, M. (2021). Estudio Socioepistemológico de la noción de Métrica. Usos y Significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34(2)*, 343–352.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3)*, 91–116.

Cooperrider, K., & Gentner, D. (2019). The career of measurement. *Cognition, 191*, 103942. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2019.04.011

Cordero, F., Mendoza-Higuera, E. J., Pérez-Oxté, I., Huincahue, J., & Mena-Lorca, J. (2022). A Category of Modelling: The Uses of Mathematical Knowledge in Different Scenarios and the Learning of Mathematics. In Rosa, Cordero, Orey, & Carranza (eds.), Mathematical Modelling Programs in Latin America: A Collaborative Context for Social Construction of Knowledge for Educational Change (pp. 247–267). Springer International Publishing.

Cordero, F., Silva-crocci, H., Soto, D., & Gómez, K. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Editorial Gedisa.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Cinvestav.

Espinoza, L., Gómez, A. V., & Zúñiga, D. V. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: La medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de investigación En Matemática Educativa, 21(3)*, 247–274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Gyllenbok, J. (2018). *Encyclopaedia of Historical Metrology, Weights, and Measures*. Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-57598-8

Hinrichsen, D., & Fernández, J. L. (1977). *Topología general*. Pueblo Y Educación.

Izzi-Prato, M. (2021). *Una Reconstrucción Racional de la tríada medida-métrica-distancia, y su relación con la Topología*. *Un estudio Socioepistemológico*. Cinvestav.

Kelley jonh L. (1955). *General Topology*. Springer.

Kula, W. (1986). *Measures and Men*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400857739

Mari. (2005). The problem of foundations of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *38(4)*, 259–266. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2005.09.006

Mari, L. (2003). Epistemology of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *34*, 17–30. https://doi.org/10.1016/S0263-2241(03)00016-2

Márquez García, G. (2018). *Una problematización del concepto de Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*. Cinvestav.

Mendelson, B. (1990). *Introduction to topology.* Dover publications. https://doi.org/10.2307/3611741

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. *Metodología En Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones*, 61–88.

Munkres, J. R. (2002). Topología. Persons Education.

Raman-Sundstrom, M. (2015). A pedagogical history of compactness. *American Mathematical Monthly*, *122(7)*, 619–635. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.7.619

Torres-Corrales, D., Lopez-Acosta, L., & Montiel, G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de matemática educativa. *Trazas de La Investigación Educativa En La Experiencia de Sus Quijotes: Reflexiones y Aportes*, 103–119.