

# XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023



[xvi.ciaem-iacme.org](http://xvi.ciaem-iacme.org)

## Trabajo Matemático en estudiantes universitarios respecto a nociones de la derivada en contexto económico

Flor Isabel Carrillo Lara  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile  
[flor.carrillo.1@mail.pucv.cl](mailto:flor.carrillo.1@mail.pucv.cl)

### Resumen

Esta comunicación es parte de una investigación en proceso que tiene como objetivo caracterizar el trabajo matemático personal de estudiantes frente a situaciones didácticas en contexto económicos, esto debido a las dificultades, errores, falta de comprensión e interpretación en la resolución de problemas sobre la derivada por parte de los estudiantes de la carrera de Economía. Además, se espera que los estudiantes logren una interpretación de los diversos significados de la derivada en contextos económicos, como es el caso del costo marginal. Consideramos investigaciones respecto a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, así como investigaciones relacionadas al estudio de las nociones de la derivada en contextos económicos. Así mismo, se presenta la pregunta, el objetivo de investigación y el análisis de tres tareas realizadas por estudiantes universitarios, basado en el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático. Finalmente, se presentan algunas reflexiones.

*Palabras clave:* Derivada, tasa de variación, costo marginal, contexto económico, Espacio de Trabajo Matemático.

### Introducción

Artigue (1995) señala que los estudiantes tienen dificultades respecto al significado de la derivada, en su expresión analítica como límite del cociente incremental o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente, lo cual genera la falta de comprensión satisfactoria del concepto. Así mismo, Bakri et al. (2021) encuentran resultados similares, ya que, al realizar una investigación con estudiantes de un curso de cálculo diferencial en la universidad, identifican que los estudiantes enfrentan grandes dificultades pues no relacionan los resultados obtenidos del análisis de las derivadas de funciones con su representación gráfica. Otra dificultad recurrente en los estudiantes universitarios está relacionada con las distintas

representaciones e interpretaciones respecto a la noción de la derivada (Díaz, 2020; Pinto, 2019). En el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), mediante el diseño de herramientas en GeoGebra, se logra obtener maneras alternativas de aproximación a conceptos matemáticos. De manera particular, una herramienta que permita a los estudiantes establecer y demostrar conjeturas respecto a la noción de variación, como una manera de aproximar una interpretación del concepto de derivada.

Feudel (2018) evidencia que estudiantes de economía realizan cálculos respecto a la derivada de manera correcta pero cuando se debe dar una interpretación económica, como el análisis marginal, no logran interpretar su significado.

De acuerdo con lo anterior, las dificultades en estudiantes universitarios en la comprensión e interpretación de situaciones sobre la derivada se presentan al momento de: relacionar el análisis de la derivada de funciones con su representación gráfica, realizar conexiones entre sus significados y representaciones, comprender su definición mediante un límite y su diversidad de representaciones. Así mismo, se considera importante el manejo de los diferentes significados de la derivada para una apropiada interpretación y análisis en la resolución de situaciones en contexto respecto a la derivada.

En economía se utiliza de manera constante los conceptos de derivada, integral, ecuación diferencial, entre otros, que son utilizados para modelar diversos fenómenos que se estudian en economía. En particular, la derivada es un tema importante en el estudio del análisis marginal, área de la economía que estudia los procesos de toma de decisiones de los agentes económicos (Sydsaeter et al., 2012; Ariza y Llinares, 2009). Por ello, consideramos la necesidad de investigar respecto a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, con estudiantes de la carrera de economía. En el siguiente apartado se presenta algunas investigaciones donde se evidencia las dificultades, errores y falta de comprensión de estudiantes universitarios sobre la derivada.

### **Investigaciones sobre la derivada en contextos económicos**

Los reportes sobre la derivada y sus contextos económicos se centran en el análisis de las distintas interpretaciones o representaciones que realizan los estudiantes, y como estos causan dificultades en los estudiantes universitarios. Amador (2020) menciona que un acercamiento a la derivada es omitir la definición por límites y emplear otras representaciones diferentes a la algebraica, ya que esta es la más empleada en las sesiones de clase como en los libros de texto, siendo esta una posible razón que los estudiantes de ingeniería se mecanizan a resolver problemas mediante algoritmos y tienen poco éxito ante los problemas en contexto u otras representaciones.

Feudel y Biehler (2021) señalan que el uso de la derivada en economía es muy heterogéneo, a veces inconsistente y contradice el conocimiento previo de los estudiantes. Esto se aplica en la interpretación económica común de la derivada, por ejemplo, el costo marginal se define mediante una tasa de variación y esta se iguala a la derivada de la función siendo este un concepto erróneo. Asimismo, para comprender la forma en que se utiliza la derivada en contextos económicos, los estudiantes deben ser capaces de interpretar la derivada. Entre sus resultados, los autores, indican que probablemente los estudiantes tienen conceptos erróneos

sobre la derivada y que no habrían adquirido una comprensión acerca de la interpretación económica. Además, manifiestan que muchos estudiantes no percibieron la conexión entre la derivada como concepto matemático y su interpretación económica a través de la aproximación lineal local a nivel conceptual.

Por lo presentado, existen diferentes significados de la derivada lo cual trae consigo complejidades, dificultades y errores cuando los estudiantes resuelven problemas relacionados a la derivada; así mismo, cuando los estudiantes deben realizar interpretaciones de la derivada en contextos económicos. Como lo menciona Amador (2020) la enseñanza de nuevos conceptos debe ser introducida mediante su uso en situaciones cercanas a los estudiantes.

En ese sentido, para la investigación se propone diseñar e implementar una situación didáctica para la enseñanza de la derivada en contexto económico. Además, se espera promover vínculos como en los ejes de formación académica para los estudiantes de economía. Para ello nos posicionaremos desde la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2022) la cual propone un trabajo matemático completo para la comprensión de un objeto matemático. Esto se detallará en la siguiente sección.

### **Espacio de Trabajo Matemático**

Se pretende analizar desde la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) según Kuzniak et al., (2022) el trabajo personal de estudiantes de economía cuando se enfrentan a situaciones didácticas que involucran a la derivada en contexto económico. Esto se realiza al considerar dos componentes a los que llamamos plano cognitivo y plano epistemológico.

Desde el ETM se definen el ETM de referencia, está compuesto por las matemáticas que pertenecen a la institución y que provienen de la matemática formal. El ETM idóneo, es un espacio de trabajo diseñado y construido por un experto, de tal manera que sea apto para su uso. El ETM personal se refiere al producto del trabajo matemático realizado por un individuo, fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica de acuerdo a sus capacidades cognitivas. Desde el ETM, una “tarea matemática” se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formuladas, que puede ser resuelto por un individuo en un espacio de trabajo definido (Nechache, 2017 citado en Kuzniak et al., 2022). Las tareas no forman parte de un ETM, pero participan en su activación cuando un sujeto se enfrenta a ellas y debe realizarlas.

En ese sentido el objetivo de la investigación es: caracterizar el trabajo matemático personal en estudiantes de economía cuando se enfrentan a situaciones didácticas sobre la derivada en contextos de economía. Por ello, en esta comunicación se tiene por objetivo resolver tareas que involucran tasa de variación y relacionarlos con la derivada.

Para llegar a dicho objetivo es preciso identificar las conexiones entre conceptos matemáticos y económicos en problemas en contexto sobre la derivada, de manera particular en los libros de textos, empleados en la carrera de economía.

### **El contexto y aspectos metodológicos**

En la revisión del texto Arya y Lardner (2009) se observa el contenido matemático de la derivada en los problemas de análisis marginal se encuentran relacionados. Una de las relaciones es cuando la función derivada permite estudiar cómo calcular la función que describe el cambio de otra función de variables continuas. El texto se considera como técnica indirecta para la recolección de datos respecto a cómo habita la derivada en la economía, en este caso nos centramos en el costo marginal.

Para esta comunicación, se selecciona un problema del libro Arya y Lardner (2009, p. 474). El problema se adapta en tres tareas, las cuales de manera sucesiva llevan a definir el costo marginal y estas tareas son analizadas desde el ETM. El objetivo de las tareas, que constan de una misma finalidad, es que los estudiantes universitarios establezcan alguna relación entre el costo promedio por artículo de las unidades extras y la derivada desde una concepción como del cociente de variación de  $y$  sobre variación de  $x$ .

Esto mediante el análisis de tres tareas de un libro considerado en la investigación, donde se identifican elementos que conectan a la tasa de variación como aproximación a una noción de la derivada, que en economía se denomina marginalidad.

La investigación es de carácter cualitativa con un enfoque descriptivo (Hernández et al. 2010). La experimentación se realizó con trece estudiantes universitarios de ciencias del semestre 2022-A, que se encuentran matriculados en el curso de cálculo diferencial. El objetivo de las tareas es que los estudiantes relacionen la tasa de variación con el concepto de derivada. A los trece estudiantes participantes en la experiencia se les denominan E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 y E13. Los datos fueron tomados de estudiantes de una Universidad Pública del Perú. A continuación, se presentan las tareas con su respuesta esperada.

**Tarea 1:** Suponga que un fabricante de cierto artículo descubre que, a fin de producir  $x$  de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por  $C(x) = 200 + 0.03x^2$ , ¿cuál es costo promedio?

**Respuesta esperada:** Cuando el costo total está expresado en relación en la cantidad de artículos,  $x$ , se obtiene un costo promedio dado por  $C(x)/x = \frac{200}{x} + 0.03x$ ,  $x \geq 0, x \in N$ . Se espera por parte de los estudiantes definir un cociente entre la función costo dada y la cantidad total de artículos, para luego redactar una respuesta según la interpretación de la tarea.

**Tarea 2:** Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a  $(100 + \Delta x)$  unidades por semana, en donde  $\Delta x$  representa el incremento en la producción semanal, ¿cuál es el costo extra?

**Sugerencia** (dada por el profesor del curso): Primero hallar el costo total y luego despejar el costo extra.

**Respuesta esperada:** Ahora el costo total es  

$$C(x + \Delta x) = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$$
 Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\Delta C = C(x + \Delta x) - C = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 = 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$$

**Tarea 3:** Respecto a la tarea 2, halle el costo promedio por artículo de las unidades extras.

**Respuesta esperada:**

$$\Delta C / \Delta x = 6 + 0.03\Delta x$$

### Análisis de tareas

Se debe tener en cuenta que la intervención del profesor del curso de cálculo diferencial se dio de manera previa a la aplicación de las tareas. En el desarrollo del tema derivadas, el profesor presenta a sus estudiantes diferentes aplicaciones de la derivada, los cuales es posible que estos fueron considerados en la resolución de los estudiantes.

A los trece estudiantes participantes en la experiencia se les denominan E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12 y E13.

Respecto a la tarea 1, los estudiantes E1, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12 y E13 realizaron una solución de la manera esperada; es decir, consideraron la función costo total y realizaron la división entre la cantidad  $x$ . Los estudiantes E2, E3 y E9 realizaron una solución para casos particulares; es decir, dieron valores específicos para  $x$ , por ejemplo,  $x = 10$ .

Sol:  $C(x) = 200 + 0,03x^2$

Si  $x=10$  se producen 10 artículos a la semana

$C(10) = 200 + 0,03(10)^2$   
 $= 200 + 0,03(100)$   
 $= 200 + 3$   
 $C(10) = 203$

El costo prom de 10 artículos a la semana es de  $\frac{203}{10} = 20,3$  dólares

Figura 1. Solución de E9-tarea 1.

El estudiante E11 plantea la solución esperada, de realizar el cociente de  $C(x)$  entre  $x$ , pero en el proceso de resolución tiene un error y cuando resuelve con un caso particular asume un arrastre de error. Entonces podemos decir que nueve de trece estudiantes realizan la tarea 1 de manera satisfactoria. Con ello, se evidencia el empleo de sus conocimientos previos sobre como hallar el promedio e identificar que tienen como dato del problema la cantidad de artículos, que en este caso es  $x$ . En la solución de la tarea 1, los estudiantes relacionan los signos que definen un cociente al cual denomina costo promedio, a partir de una representación algebraica. Es decir, desde el ETM se activa la Génesis semiótica. Así mismo, emplean propiedades del álgebra quien es el artefacto simbólico el cual les permite hallar el costo promedio, así se evidencia la activación de la Génesis instrumental. Por ello, podemos evidenciar las interacciones de las

génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

Respecto a la tarea 2, los estudiantes E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10 y E12 resolvieron de manera esperada, es decir, hallaron el nuevo costo total donde el argumento de la función costo es  $x + \Delta x$ . Comentar que el estudiante E5 denota  $\Delta x$  a la variación de los costos. Los estudiantes E6 y E13 resuelven de manera parcial, solo hallan  $C(x + \Delta x)$  y no el costo extra (la diferencia entre  $C(x + \Delta x)$  y  $C(x)$ ). Además, mencionar que el estudiante E11 no resuelve la tarea. Entonces podemos decir que diez de trece estudiantes realizan de manera satisfactoria la tarea 2. En esta tarea, los estudiantes emplean signos del álgebra para denotar las funciones y variaciones de estas, predomina la representación algebraica. Es decir, desde el ETM se activa la Génesis semiótica. También emplean propiedades del álgebra quien es el artefacto simbólico el cual les permite hallar el costo extra, así se evidencia la activación de la Génesis instrumental. Por ello, podemos evidenciar las interacciones de las génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

En el desarrollo de la tarea 3, los estudiantes E1, E2, E5 y E11 no resuelven lo pedido. En el caso de los estudiantes E3, E4, E8, E9, E10 y E12 presentan de manera correcta la solución de la tarea; respecto al estudiante E4 no realiza ninguna simplificación ni resuelve las expresiones algebraicas como el binomio al cuadrado. Los estudiantes E6, E7 y E11 consideran el cociente entre  $x$  en vez de  $\Delta x$ , por ello se identifica un error en su resolución. Entonces solo seis de trece estudiantes logran la respuesta esperada, es decir, relacionar el concepto previo de hallar un promedio, pero en este caso se debe tener en cuenta que es una tarea en contexto económico, ya que se establece relación entre el promedio de la función costo por artículo de las unidades extras. De manera similar, a la tarea 1 se identifica las interacciones de las génesis semióticas e instrumental, y así la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental [Sem-Ins].

### Algunas reflexiones

En la solución de las tres tareas, los estudiantes lograron de manera parcial las respuestas esperadas. Además, se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes resolvieron los procedimientos algebraicos respecto a las funciones económicas de manera correcta, pero en la tarea 3 cuando se tenía una pregunta de interpretación en economía, respecto al costo promedio por artículo de las unidades extras, solo seis de trece estudiantes presentan el cociente correcto.

Respecto al ETM personal de los estudiantes, podemos decir que lograron la activación de las Génesis Semiótica e Instrumental, pero no se logró dar una respuesta según el contexto de cada tarea. Entonces nos proponemos reformular las preguntas para obtener como parte de la solución una respuesta en el contexto de economía y también considerar alguna tarea que genere la activación de la Génesis discursiva y así orientarnos a un trabajo matemático completo por parte de los estudiantes universitarios cuando se enfrentan a tareas en contexto de economía.

### Referencias y bibliografía

Amador, O. (2020). *Introducción de la derivada en el contexto de problemas de máximos y mínimos utilizando desarrollos de Taylor algebraicos y el acercamiento infinitesimal que provee GeoGebra*. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

<https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3886>

- Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 121–136. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v27-n1-ariza-llinares>
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/40560/Ingenieria-didactica.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Arya, C. y Lardner, W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y economía*. Editorial Prentice Hall.
- Bakri, A., Liew, C., Chen C., Tuh, M. & Ling, S. (2021). Bridging the Gap Between the Derivatives And Graph Sketching in Calculus: An Innovative Game-Based Learning Approach. *Asian Journal of University Education*, 16(4), 121-136. <https://doi.org/10.24191/ajue.v16i4.11962>
- Díaz, V. (2020). Difficulties and Performance in Mathematics Competences: Solving Problems with Derivatives. *International Journal of Engineering Pedagogy*, 10 (4), 35–52. <https://doi.org/10.3991/ijep.v10i4.12473>
- Feudel, F. (2018).  $C'(x) = C(x+1) - C(x)$ ? - Students' connections between the derivative and its economic interpretation in the context of marginal cost. *INDRUM 2018, INDRUM Network, University of Agder, Apr 2018, Kristiansand, Norway*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849946>
- Feudel, F., y Biehler, R. (2021). Students' Understanding of the Derivative Concept in the Context of Mathematics for Economics. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, 42(1), 273–305. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Editorial Mc Graw Hill.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgado, E., & Richard, P. (Ed.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context - The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Pinto, I. (2019). *Un modelo para la comprensión de la derivada en su perspectiva local: un estudio de casos en el contexto universitario*. [Tesis de Doctorado, no publicada]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., y Carbajal, A. (2012). *Matemáticas para el análisis económico*. PRENTICE HALL.
- Villa-Ochoa, J., y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 12, 514–528. <http://funes.uniandes.edu.co/1545/>