XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

El papel histórico de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales

Hilda Tatiana **Iquinás** Volverás
Universidad del valle
Colombia
hilda.iquinas@correounivalle.edu.co
Norida Manuela **Iquinás** Volverás
Universidad del Valle
Colombia
norida.iquinas@correounivalle.edu.co
Luis Cornelio **Recalde** Caicedo
Universidad del Valle
Colombia
hsv@hr.ac.br

Resumen

En esta comunicación breve, se presenta un estudio historiográfico, donde se resalta el papel determinante de los sistemas de representación presentes en la evolución histórica del concepto de número, en particular, la potencia del sistema de representación decimal indo- arábigo en la instauración de los números reales, el cual captura diferentes aspectos de los sistemas numéricos desarrollados en las antiguas civilizaciones, permitiendo establecer algoritmos operativos para los números racionales. Se hace énfasis en la construcción de los números reales de Georg Cantor, quien fundamenta su teoría por medio de las sucesiones fundamentales de números racionales, donde se evidencia que la sucesión muestra un procedimiento algorítmico para aproximar un número irracional por medio de su representación decimal, lo que permite incorporar a los números reales por medio de sucesiones fundamentales.

Palabras clave: Evolución del concepto de número; Números reales; Sistema de representación; Sistema de representación decimal; Sucesiones fundamentales.

Planteamiento del problema

La noción de representación ha jugado un papel importante en el desarrollo histórico de las matemáticas, en particular en las diferentes etapas de la evolución histórica del concepto de número, ya que se necesitaron miles de años para consolidar e implementar formas efectivas de referir formalmente las actividades de ordenar, contar y medir a través de sistemas numéricos. En este largo recorrido histórico se puede observar que los múltiples sistemas de representación que se construyeron en las antiguas civilizaciones como la numeración egipcia que tenía un sistema de numeración aditivo y la numeración romana que combinaba el aditivo y decimal por nombrar algunas, lograron representar las cantidades por medio de jeroglíficos o símbolos relacionados a su cultura y a establecer algoritmos operativos con los cuales se lograban realizar las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división). Sin embargo, dichos sistemas de numeración se vieron limitados al momento de representar y operar con cantidades muy grandes, demandando un sistema de numeración más práctico, mediante el cual se logrará representar los números, con un número determinado de símbolos básicos. A través del sistema de numeración decimal indo-arábigo se alcanza ese objetivo, ya que logra capturar diferentes aspectos de los sistemas numéricos, desarrollados en las antiguas civilizaciones, mediante la implementación de los agrupamientos regulares, el principio de la base 10, el valor posicional y la introducción de la cifra cero como número, permitiendo la representación de cualquier cantidad o fracción de la cantidad, utilizando sólo los numerales del cero al nueve. Es en este sentido, que el sistema de numeración indo-arábigo, juega un papel determinante en el desarrollo de las matemáticas, particularmente en la construcción de los números reales, pues permite brindarles estatuto numérico a las fracciones, incluso aquellas que se representan con un número infinito de decimales.

Posteriormente, la representación decimal se vuelve muy potente para establecer diferencias entre los números, en este caso, los números racionales de los irracionales. Para los números racionales se obtiene una representacional decimal finita o infinita periódica y para los números irracionales una representación decimal infinita no periódica. Sin embargo, esta representación no es suficiente para el reconocimiento de los números irracionales, pero puede ser un primer acercamiento a ellos, que más adelante sirve para reconocer las diferentes construcciones de los números irracionales. Por ende, el interés de esta ponencia es resaltar por medio de una revisión histórica, el papel determinante de algunos sistemas de representación, en particular, la potencia del sistema de representación decimal indo-arábigo en la instauración de los números reales de Georg Cantor. Por tal motivo, nos preguntamos: **¿Cuál es la importancia histórica de la representación decimal en el proceso de formalización de los números reales?**

Metodología

Para dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados anteriormente, se hizo la revisión de múltiples documentos, los cuales fueron analizados teniendo en cuenta el método hermenéutico, el cual consiste en la lectura, análisis e interpretación de fuentes primarias que fueron seleccionadas por su relación y pertinencia con el problema y objetivos de la investigación. Se utilizaron fuentes secundarias para complementar la comprensión y análisis de las fuentes primarias. La lectura y análisis de los diferentes documentos se realizó teniendo como referencia la noción de representación, pues se trataba de evidenciar que se podría establecer elementos de causalidad y de síntesis teórica, a partir de las diversas representaciones que históricamente se pueden reconocer.

En la siguiente tabla, se presentan las fuentes primarias, el aporte a la investigación, las fuentes secundarias principales que se utilizaron para la complementación y el objetivo específico que se quiere abordar con los documentos.

Tabla 1. Fuentes primarias y secundarias

Objetivo	Fuente primaria	Autor	Aporte a la investigación	Fuentes secundarias
Apunta al primer objetivo específico.	*Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*	Raymond Duval (2004)	Sustenta la idea que las representaciones semióticas se pueden considerar como herramientas para producir nuevo conocimiento.	• (Duval, 1993) • (Kaput, 1987) • (Radford, 2013)
Apuntan al segundo objetivo específico.	*Las cifras. Historia de una gran invención*	Georges Ifrah (1985)	Contribuye a la construcción de la historiografía de los sistemas numéricos, con el fin de resaltar la importancia de la representación decimal en la instauración de algoritmos operativos.	• (Guadi, 2000) • (Kline, 1992) • (López, 2010) • (Ugarte, 2011)
	Elementos	Euclides (1991)	Es uno de los tratados más importantes que logra sintetizar los trabajos realizados por los griegos; contribuyen a comprender los inicios de la historia de las matemáticas. En el libro X, que trata sobre las magnitudes inconmensurables, se rastrean algunas intuiciones sobre los números irracionales, dando algunas bases para la formalización de los números reales	

Apuntan al tercer objetivo específico.	*Curso de análisis*	Agustín Cauchy (1821)	Establece formalmente la noción de convergencia de sucesiones. Plantea la convergencia de las sucesiones fundamentales, llamadas así por Cantor, pero que luego se denominarán “sucesiones de Cauchy”.	• (Recalde & Vargas, 2009) • (Mora & Torres, 2004) • (Recalde & Arbeláez, 2011) • (Recalde, 2018)
	Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen	Georg Cantor (1872)	Fundamenta su teoría de los números reales, en sucesiones de números racionales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, las cuales denominó sucesiones fundamentales.	

Por ende, la investigación se realizó mediante un estudio historiográfico, el cual se analizó por medio de las múltiples representaciones que surgieron en la evolución histórica de los números reales, siendo la representación decimal el hilo conductor de la investigación.

Análisis

Uno de los antecedentes importantes en el proceso de formalización de los números reales, se puede localizar en los desarrollado del matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), con respecto a las fracciones continuas. Euler clasifica en dos tipos las fracciones continuas, las que son finitas y las que son infinitas, las cuales se pueden expresar respectivamente como:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \quad \text{y} \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son números enteros positivos, así que Euler sólo se preocupa por los números positivos.

Por ejemplo:

a. Para encontrar la fracción continua de $\frac{29}{6}$, realizamos el siguiente procedimiento:

- Dividimos 29 entre 6. Por el algoritmo de la división de Euclides tenemos que: $29 = 6 \cdot 4 + 5$
- Dividimos entre 6 y obtenemos que: $\frac{29}{6} = \frac{6 \cdot 4}{6} + \frac{5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$
- Ahora, dividimos 6 entre 5 y obtenemos que $6 = 5 \cdot 1 + 1$

- Dividimos entre 5 y obtenemos que: $\frac{6}{5} = \frac{5\cdot 1}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$
- Elevamos a ambos lados por -1: $\left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{-1}$

  $$\frac{5}{6} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

- Al reemplazar el valor de $\frac{5}{6}$, obtenemos que:

  $$\frac{29}{6} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

Como la fracción continua es finita, $\frac{29}{6}$ es un número racional.

A continuación, se muestra que la fracción continua finita de $\frac{29}{6}$ se puede representar por medio de la representación decimal.

$$\frac{29}{6} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = 4 + \frac{1}{\frac{6}{5}} = 4 + \frac{5}{6} = 4 + 0.83333333333333 = 4{,}0.8333333333333333$$

Es decir, que gracias al algoritmo de Euclides se va enmarcando la representación decimal de una fracción continua finita.

Para el caso de las fracciones continuas infinitas, el procedimiento es más complicado, sin embargo, se proporciona el siguiente ejemplo.

b. Fracción continua del número $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Como la fracción continua de $\sqrt{2}$ es infinita, entonces $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Por ende, para encontrar su representación decimal, tómanos los primeros cuatro términos como se muestra a continuación:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \approx 1 + \frac{2}{5} \approx 1 + 0.4 \approx \mathbf{1,4}$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} \approx 1 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} \approx 1 + \frac{5}{12} \approx \mathbf{1,41}66$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}}} \approx 1 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}} \approx 1 + \frac{12}{29}$$

$$\approx \mathbf{1,41}3793$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}}} \approx$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{29}{12}}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}} \approx 1 + \cfrac{1}{\frac{70}{29}} \approx 1 + \frac{29}{70} \approx \mathbf{1{,}414}28571$$

Se observa que entre más términos se tomen, se podrá obtener una mejor aproximación del número irracional $\sqrt{2}$.

Gracias a la teoría de las fracciones continuas, obtenemos otro tipo de representación para los números racionales e irracionales, el cual nos permite diferenciarlos. Por tal motivo, podemos decir que las fracciones continuas guardan información sobre la naturaleza del número. Las fracciones continuas permiten dimensionar una construcción de los números reales, esto es, porque gracias a ellas, a los racionales se les asocia las fracciones continuas finitas y a los irracionales, las fracciones continuas infinitas (Recalde & Vargas, 2009).

El Axioma 10 de completitud, permite introducir los números irracionales, en un proceso ligado directamente con la representación decimal. De esta manera, a partir del cero, 0 y del uno, 1, se empiezan a generar los números enteros positivos, $\mathbb{Z}^+$, los enteros negativos, $\mathbb{Z}^-$y los enteros no negativos, $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, los números racionales, $\mathbb{Q}$. Esto nos permite retomar la representación decimal como herramienta de reconocimiento y de operatividad de los números reales, de acuerdo con el siguiente proceso.

Definición: Sea el número racional *r*:

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un número entero no negativo, $y\ a_1, a_2, \ldots a_n$ son números enteros, tales que:

$0 \leq a_i \leq 9,$ para $1 \leq i \leq n,$ entonces *r* se expresa de la forma:
$r = a_0.\, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, la cual se denomina *la representación decimal finita* de *r*.

A partir de la representación decimal finita podemos establecer la representación de cualquier número real, tomando como referencia el Axioma 10, del extremo superior.

Teorema: Sea $r \geq 0$ un número real, entonces, para todo número entero $n \geq 1$, existe un decimal finito $r_n = a_0.\, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ tal que, $r_n \leq r < r_{n+1}$.

Podemos obtener dos aproximaciones de un número irracional *x*, tomando *n* lo suficientemente grande: Una aproximación por exceso y la otra por defecto.

Por ejemplo, si consideramos a $x = \sqrt{2}$, podremos calcular tantos dígitos como se quiera de su aproximación decimal. Para ello, vamos a partir de la siguiente desigualdad:

$$(1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$$

Lo cual implica que:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$1 + \frac{4}{10} + < \sqrt{2} < 1 + \frac{5}{10}$$

Entonces, si subdividimos en 10 partes iguales al segmento que va de $1 + \frac{4}{10}$ a $1 + \frac{5}{10}$, obtenemos intervalos de medida $\frac{1}{10^2}$.

Para encontrar el intervalo en donde se encuentre $\sqrt{2}$, vamos a considerar la siguiente desigualdad:

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}\right)^2 < 2 < \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2}\right)^2.$$

Lo que implica que $(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2$ y al resolver los cuadrados, obtenemos que $1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$, por consiguiente, el número 2 se encuentra entre $(1.41)^2$ y $(1.42)^2$ y se cumple que,

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42.$$

Si deseamos más dígitos de la representación decimal de $\sqrt{2}$, basta con repetir el anterior procedimiento una cantidad finita de veces, donde se obtiene una sucesión de intervalos de longitud $\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots$, respectivamente. Cada intervalo está contenido en el anterior, por ende, cada uno de los intervalos contiene a *x*.

Es así, como se pueden obtener las primeras tres aproximaciones sucesivas del número irracional $\sqrt{2}$.

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42, \qquad 1.414 < \sqrt{2} < 1.415, \qquad 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$

Si el número es racional, la expansión decimal es finita o periódica, lo que significa que es posible establecer completamente su representación. El problema se presenta para los números irracionales. El teorema nos muestra que es posible aproximarlo, tanto como se quiera, a través de racionales, es decir, a través de una sucesión de racionales, que justamente corresponde al proceso seguido por Cantor para la construcción de los números reales.

Conclusiones

La revisión histórica empieza en la antigüedad griega, en el contexto de la escuela pitagórica, nos percatamos de la existencia de las magnitudes inconmensurables que constituyen un antecedente lejano de los números irracionales. Gracias al algoritmo de Euclides se visualiza que las magnitudes inconmensurables tienen asidero en la representación decimal, ya que se va enmarcando la representación decimal periódica y decimal infinita no periódica. Posteriormente, en los estudios de Euler se identifica una contribución significativa al aspecto operativo estableciendo la teoría de las fracciones continuas. Se muestra que las fracciones continuas guardan información sobre la naturaleza de los números, permitiendo bosquejar una construcción de los números reales, al mostrar que todo número racional se puede representar con una fracción continua finita y que todo número irracional se puede representar con una fracción continua infinita, lo cual guarda relación directa con la representación decimal, en el sentido que establece una forma de representación de los números irracionales a partir de los racionales.

En este sentido, la representación decimal constituye un elemento de causalidad muy importante para los desarrollos posteriores realizados por Cantor y Dedekind sobre los números reales. Sin embargo, en la ponencia, se hace énfasis en la construcción formal de los números reales de Georg Cantor, quien fundamenta su teoría por medio de las sucesiones fundamentales de los números racionales, donde se evidencia que la sucesión muestra un procedimiento algorítmico para aproximar a un número irracional por medio de su representación decimal, lo que permite incorporar a los números reales por medio de sucesiones fundamentales.

Referencias y bibliografía

Apostol, T. M. (1988). *Calculus* . Bogotá : Reverté colombiana S.A. .

Arboleda, L. C. (2015). Objetividad matemática, historica y educación matemática. *ResearchGate*, 7.

Bell, J. L. (2020). The Continuum and the Evolution of the Concept of Real Number. En J. L. Bell, *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice.* (pág. 13). Springer, Cham .

Calderón, N. (2014). Diferentes construcciones del número real . *Diferentes construcciones del número real* . Bógota , Colombia : Universidad Nacional de Colombia .

Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5, 123-132.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* (C. Alvarez, Trad.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II.* México : Siglo ventiuno editores, sa de cv .

Duval, R. (1993). Registro de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. . *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 37-65.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento humano. Registro semiótico y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *funes.uniandes* .

Escobar, G. (2020). Los Juicios Sintéticos a Priori de Kant . *Revista Institucional Universidad Pontificia Bolivariana*, 56-57.

Euclides. (1991). *Elementos.* Barcelona: Gredos.

Glasersfeld, V. (21 de August de 2001). Constructing Communication . (A. Pitasi, Entrevistador)

González, N. (2017). Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones. . *Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones.* . Bogotá , Colombia : Universidad Nacional de Colombia. .

Guedj, D. (2000). *El imperio de las cifras y los números* . Barcelona : Biblioteca de bolsillo CLAVES.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* . Reston, Virginia : National Council of Theachers of Mathematics.

Ifrah, G. (1985). *Las cifras. Historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial .

Kant, I. (1928). *Crítica de la razón pura.* Madrid: Edición digital basa en la edición de Madrid, Librería General de Victoriano Suárez.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol use in Mathematics. En C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (págs. 159- 193). Montreal : Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días* . Madrid : Alianza editorial .

López, M. (2010). Los números base de la ciencia y de la transmisión actual de la información . *XI programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica*, 51-52.

Mora, L., & Torres, J. (2004). El número real a través de la historia . En L. Mora, & J. Torres, *Concepciones de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas sobre números reales* (págs. 48- 50). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional .

Mormann, T. (2018). Structure-preserving representations, constitution, and the relative a priori. *Modeling and Representation* .

Mormann, T. (2018). Structure-Preserving representations, constitution, and the relative a priori. . *Springer*, 5.

Pineda, D., & Ñañez, Y. (2018). Intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales. *Intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales*. Cali , Colombia : Universidad del Valle .

Radford, L. (2004). Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 5.

Radford, L. (2008). The Ethics of being and Knowing: Towards a Cultural theory of learning . En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture.* (págs. 215- 234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2013). On the rol of representations and artefacts in knowind and learning . *Educ. Stud Mathe (2014)*.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas* . Cali : Universidad del Valle .

Recalde, L., & Arbeláez, G. (2011). *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico - epistemológica* . Cali : universidad del Valle .

Recalde, L., & Vargas, V. (2009). Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y Comprensión del concepto de Número Real. Una experiencia Didáctica en secundaria. . *Revista Ema*, 117-151.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas* . Costa Rica : Universidad Estatal a Distancia .

Sarango, J. (2015). Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant. *Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant*. Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal.* Barcelona : Editorial Reverté, S.A. .

Torres, R. I. (2019). *Los secretos de la multiplicación: De los Babilonicos a los ordenadores.* . Madrid : Los libros de la catarata. .

Ugarte, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci.* Lulu.com.