

# XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023



[xvi.ciaem-iacme.org](http://xvi.ciaem-iacme.org)

## Implementación del modelo GTG utilizando GeoGebra y Graspable math en una propuesta de intervención didáctica

Ghymel Adilenne **Soqui** Félix

Universidad de Sonora

México

[A221230130@unison.mx](mailto:A221230130@unison.mx)

César Fabián **Romero** Félix

Universidad de Sonora

México

[cesar.romero@unison.mx](mailto:cesar.romero@unison.mx)

### Resumen

El presente trabajo parte del estudio de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para alumnos de educación secundaria, con el fin de atenderlas por medio del diseño de una propuesta de intervención didáctica.

Este proyecto tiene como objetivo principal el desarrollo del razonamiento algebraico a partir del uso del modelo GTG, el cual según Kieran (2014) el Álgebra se puede dividir en tres tipos de actividades, que son la Generacional, Transformacional y metanivel/Global. Apoyándose en el uso de tecnología mediante el software Graspable math.

Como metodología, la propuesta consiste en el diseño, implementación y análisis de resultados de dos secuencias didácticas con el tema de sistemas de ecuaciones lineales de dos por dos, hasta el momento se ha terminado de diseñar una secuencia la cual fue aplicada en una prueba piloto con un grupo focal, del cual se presentarán los primeros hallazgos.

*Palabras clave:* Razonamiento algebraico; Actividad Generacional, Transformacional; Metanivel/Global; Modelo GTG.

## **Problemática: Álgebra como actividad**

El Álgebra se puede interpretar con base en distintos significados, como una herramienta, un lenguaje, una forma de pensar, un tipo de procedimientos o, como explica Pimm (citado por Kieran, 2004, p.22), como una actividad: “Álgebra... es mucho más acerca de hacer, es en realidad sobre la acción de las cosas... con la atención de ser más en las transformaciones que en los propios objetos”.

### **Dificultades sobre sistemas de ecuaciones lineales de dos variables**

En la revisión de literatura especializada encontramos que, según distintos autores (visto en Kieran, 2004): los estudiantes no están viviendo lo que en realidad abarca el Álgebra y esto genera mayores dificultades en su aprendizaje. Al respecto, se identifican distintos tipos de dificultades en el aprendizaje de ecuaciones en el Álgebra escolar, estas pueden ser causadas por distintos motivos o factores que pueden ser externos a los estudiantes. Se mencionarán algunas para profundizar en aspectos a tomar en cuenta para el desarrollo de este proyecto: dificultades para plantear o generar expresiones algebraicas, dificultades para resolver ecuaciones lineales y para desarrollar el concepto de solución, dificultades con ecuaciones de dos variables; y finalmente dificultades con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, de la cual se abordarán ciertas características para profundizar en el tema de sistemas de dos por dos.

Para Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) las distintas dificultades que tienden a desarrollar los estudiantes respecto al tema de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se relacionan con los conocimientos aritméticos de su experiencia anterior, así como el cambio de encontrar solamente el valor de  $x$  a tener que encontrar el valor de  $x$  y  $y$ , una de las principales dificultades identificadas es el significado que se le da al signo igual, puesto que lo relacionan a una solución y les cuesta aceptarlo como una equivalencia. Otra dificultad para los estudiantes es el significado que se le da a la variable y la incógnita dentro de un sistema, al abordar este tema sigue la tendencia de buscar valores numéricos para  $x$  y se reusan a aceptar soluciones donde todavía “existan incógnitas”.

## **Objetivos**

Tomando en cuenta diversos avances en la caracterización de las dificultades de los estudiantes, y los distintos enfoques de enseñanza que atienden varias de estas, se observa que todavía es necesario atender algunos elementos específicos. En particular, nos interesa aportar a la solución de esta problemática en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones para favorecer el desarrollo de razonamiento algebraico. Por lo tanto, se planten los siguientes objetivos.

### **Objetivo general**

Diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de segundo grado de secundaria al resolver problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el uso del modelo GTG e incorporando el software de GeoGebra.

## Objetivos específicos

1. Reconocer e identificar principales problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones de dos por dos en la literatura especializada.
2. Definir criterios para diseñar actividades didácticas que favorezcan cada una de las actividades del modelo GTG.
3. Proponer el tipo de situaciones problema basados en el modelo GTG para utilizar dentro del diseño de la propuesta de intervención.
4. Determinar usos apropiados de tecnología digital para la enseñanza de los métodos de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
5. Valorar la pertinencia del diseño a partir de su implementación y análisis.

## Elementos teóricos

Según Kieran (2014), la enseñanza del Álgebra se puede dividir en tres tipos de actividades, que son la **Generacional**, **Transformacional** y **metanivel/Global**. Esta clasificación define el modelo **GTG**, en el cual se plantea que para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra se requieren los tres tipos de actividades que componen la actividad Algebraica. Según este modelo, tales actividades se complementan entre sí y dan como resultado el aprendizaje de un tema desde distintos enfoques, lo cual permite a los estudiantes un panorama más abierto y completo; el enfoque principal de este modelo es la manera en la que se puede favorecer el desarrollo del razonamiento algebraico a partir de secuencias de tareas que permitan la transición entre las distintas actividades.

### Actividades Generacionales

Las actividades generacionales implican la formación de expresiones y ecuaciones, por lo tanto, en este tipo de actividades se incluye el trabajo con variables, incógnitas e igualdad, dentro de ellas se pueden encontrar ecuaciones que contienen una incógnita que representa un problema, expresiones de generalidad derivada de patrones o secuencias numéricas, expresiones de reglas que gobiernan las relaciones numéricas. Según Kieran (2004) el enfoque principal de este tipo de actividad es la representación e interpretación de las situaciones, patrones de propiedades y relaciones, es el primer acercamiento de lo que se está representando, primer paso antes de tomar expresiones.

### Actividades Transformacionales

La característica principal de las actividades transformacionales es el trabajo con expresiones o ecuaciones equivalentes, también se incluye el entendimiento y uso de propiedades y axiomas. Esta actividad puede incluir factorizaciones, sustituir una ecuación por otra, suma y multiplicación de polinomios, resolver ecuaciones y desigualdades, simplificación, etc. (Kieran, 2007).

Es importante que este tipo de actividad incluya tanto trabajo procedimental como teórico. Las actividades transformacionales pueden llevar a la comprensión de los conceptos del Álgebra a partir de trabajar con procedimientos.

## Actividades Globales

Las actividades metanivel/global aluden a un uso de herramientas y estrategias algebraicas que no son exclusivas del Álgebra, por ejemplo: modelado, trabajo con patrones, justificación y demostraciones, predicciones y conjeturas. También proporcionan el contexto, sentido de propósito y motivación para participar en las actividades mencionadas anteriormente. (Kieran, 2014)

### Descripción de la propuesta

La propuesta consiste en la aplicación de dos secuencias didácticas con el objetivo de desarrollar los métodos de solución sobre el tema de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, una secuencia de actividades enfocada en el método de despeje y sustitución y otra en el método de igualación, la cual sigue en proceso de diseño, en este documento describiremos a detalle la secuencia de despeje y sustitución, la cual fue puesta en escena en una prueba piloto con un grupo focal.

### Secuencia didáctica 1: Despeje y sustitución

Esta secuencia se divide en etapa de inicio, desarrollo y cierre similar a lo que propone Díaz-Barriga (2013), utilizando la metodología del modelo GTG propuesto por Kieran (2004) con un enfoque en el desarrollo de razonamiento algebraico, siendo las actividades de metanivel/global las que dirigen a las otras actividades del modelo.

Para el uso de tecnología se seleccionó el uso de *Graspable math*, que es un software que puede apoyar el aprendizaje del método de despeje y sustitución, puesto que el objetivo principal de dicho programa es la resolución de ecuaciones, gracias a sus manipulaciones interactivas en base a la utilización de comandos fáciles como el uso de arrastres de elementos de las expresiones algebraicas, números, constantes operadoras, etc. de una ecuación a otra, lo cual facilita la visualización de la aplicación del método a desarrollar.

**Etapa de inicio.** Las actividades globales y generacionales son las que dirigen la etapa de inicio, enfocándose en la interpretación de un contexto para la comprensión del problema como actividad global (Ver Figura 1) y expresar relaciones entre objetos algebraicos para lograr generar al menos una ecuación de dos variables que represente el problema, como actividad generacional.

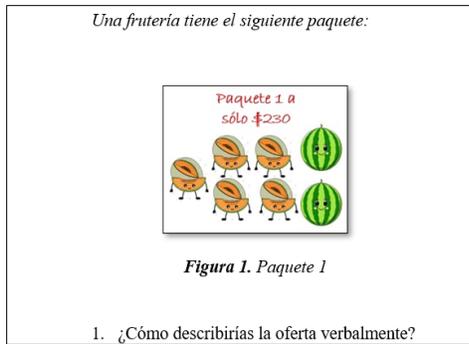


Figura 1. Contexto actividad despeje y sustitución

Uno de los criterios importantes en esta etapa es que los estudiantes reflexionen sobre la situación, que permita identificar posibles problemas, teniendo como objetivo el observar y comprobar que no se puede determinar solución única a partir de una ecuación de dos variables y concluyendo en que una ecuación de dos variables tiene *infinitas* soluciones.

Así como, analizar relaciones entre las variables y constantes del problema, teniendo como objetivo principal encontrar soluciones de una ecuación de dos variables, que a partir de un valor fijo para una incógnita deduzcan el valor de la otra y observar que no cualquier par de valores es solución. Finalmente, en esta etapa se trabaja con un primer acercamiento a Graspable math para que los estudiantes se familiaricen con el software y los comandos que utilizarán en el resto de la secuencia.

**Etapa de desarrollo.** La etapa de desarrollo está guiada por actividades globales y transformacionales, siendo la justificación de respuestas, predicciones y conjeturas para entendimiento del procedimiento de solución la actividad global y como actividad transformacional el trabajo de sustitución, elementos teóricos/conceptuales para obtener como resultado un acercamiento al método de despeje y sustitución, así como la utilización de Graspable math como apoyo para estas últimas actividades.

También se tomó importancia en desarrollar estrategias o técnicas para solución utilizando o generando conocimientos matemáticos, teniendo como objetivos principales el planteamiento de una ecuación de dos variables, planteamiento de problemas de la situación en términos matemáticos, relación entre dos variables y observar y comprobar que se requiere otra ecuación para resolver el problema, así como, lograr encontrar solución al sistema de ecuaciones.

**Etapa de cierre.** Esta etapa tiene como criterio principal extender y refinar los conocimientos nuevos, por lo tanto, se hace uso de actividades transformacionales para la formalización/institucionalización de los métodos y conceptos, actividad global para modelado, justificaciones y demostraciones y actividad generacional en el trabajo con ecuaciones de manera formal. También se utiliza Graspable math como apoyo para la refinación del uso del método de despeje y sustitución.

Esta etapa tiene como objetivo principal el que los estudiantes aprendan a identificar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y que se comprenda y practique el uso del método.

## Metodología y pilotaje

El desarrollo de esta propuesta se compone mediante una etapa preliminar al diseño, etapa de diseño, implementación y análisis de resultados, a este momento se ha trabajado hasta la fase de diseño y se implementó una prueba piloto para refinación de detalles, se tiene previsto trabajar este semestre con la etapa final de la propuesta, la cual consiste en la implementación formal y analizar los resultados obtenidos de dicha implementación.

El pilotaje fue desarrollado con tres estudiantes voluntarias, de tercero de secundaria, con poca experiencia en el desarrollo de ecuaciones algebraicas, por lo que requerían apoyo en el aprendizaje del tema de sistemas de ecuaciones de dos por dos.

### Objetivos del pilotaje

El pilotaje tiene como objetivo principal valorar el diseño e identificar cambios necesarios antes de la implementación formal ante un grupo de segundo grado de secundaria. Por lo tanto, se observará la accesibilidad de los contextos, para que los estudiantes comprendan y logren encontrar sentido a las actividades algebraicas desarrolladas dentro de la secuencia. Otro punto importante es analizar la estructura de la secuencia, que se cumplan las metas esperadas y tomadas en cuenta para el diseño.

Comprobar los objetivos propuestos con el uso del modelo GTG, así como, verificar que el uso del software sea de apoyo para los estudiantes y no dificulte el desarrollo de las actividades, con el fin de refinar el diseño en extensión y prever cambios necesarios para la secuencia 2, antes de la implementación de ambas secuencias.

Para las etapas posteriores se tiene programado para el semestre 2023-1 realizar la valoración completa del pilotaje, con el fin de identificar posibles cambios a las secuencias antes de la implementación formal, la cual se tiene prevista que se llevará a cabo el mes de febrero, pues a partir de ese mes es cuando se verá el tema de sistemas de dos por dos en segundo de secundaria.

Finalmente se trabajará con el análisis de resultados de la implementación de la propuesta, se tiene esperado que a más tardar en marzo se comience con esta etapa, la cual completará el trabajo del proyecto pues aquí es donde se validará si la propuesta cumple realmente con los objetivos finales del proyecto.

A continuación, se describirán las observaciones principales del pilotaje.

### Observaciones del pilotaje

El pilotaje se llevó a cabo en dos sesiones con un total de 8 horas, las sesiones fueron impartidas en un fin de semana con tres voluntarias de tercero de secundaria, se esperaba que las estudiantes tuvieran ciertas dificultades con el trabajo de ecuaciones puesto que, debido a causas de la pandemia, se puede observar que requieren apoyo en conocimientos básicos algebraicos.

Como ya se mencionó, la secuencia aplicada fue la de despeje y sustitución, a continuación, se mencionarán algunas de las observaciones importantes, las cuales se tomarán en cuenta para la refinación de la propuesta.

**Observaciones del diseño, respuestas o participaciones notables**

En la etapa de inicio se tenía previsto que las estudiantes contestaran que la fruta más cara del paquete del contexto es la sandía, esto se confirmó en el pilotaje (Ver Figura 2) ya que las tres estudiantes intuitivamente asociaron que la sandía en el contexto de la secuencia es la fruta más cara. Se sospecha que esta asociación se puede relacionar con distintos factores, entre ellos el precio actual de la sandía en el mercado, por los coeficientes de la ecuación puesto que la cantidad de sandías es menor, hasta el tamaño de la fruta.

En este caso la respuesta es incorrecta, puesto que en el inicio solamente se plantea una ecuación de dos variables y para resolver esta asociación falsa, en las siguientes actividades se trabajó en ilustrar a las participantes que en esta actividad la fruta más cara podría ser tanto el melón como la sandía, conclusión a la que si lograron llegar cumpliendo los objetivos didácticos de esta etapa.

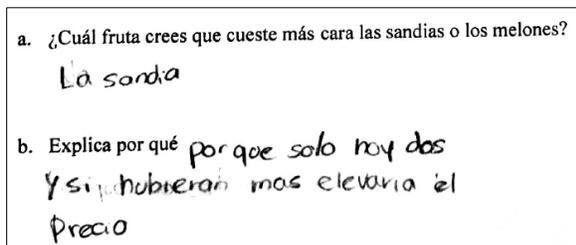


Figura 2. Estudiante 1. Respuesta de la fruta más cara

En el caso de la estudiante 3 (Figura 3), se puede observar que si trabaja correctamente con la notación algebraica, este caso en particular fue importante puesto que en la secuencia observamos que, después del trabajo con las actividades del software Graspable math, la estudiante cambió la notación indicando los movimientos o ‘arrastres’ con los que se trabajan en el software, (Ver Figura 4) por lo que la actividad generacional fue influenciada por la actividad transformacional que se trabajó en Graspable math.

6. Repite el procedimiento que hiciste en la pregunta anterior para explorar cuál podría ser la fruta más cara.

Precio conocido	Precio desconocido	Fruta más cara
Una sandía por \$5	$5M + 2W = 230$ $5M + 2(5) = 230$ $5M + 10 = 230$ $5M = 230 - 10$ $5M = 220$	$\frac{220}{5} = 44$ Melón M \$44 W \$5

Figura 3. Estudiante 3, notación algebraica antes de Graspable math

9. En las preguntas anteriores encontraste posibles combinaciones de precios para la sandía y el melón con base en el precio total del *Paquete 1*, completa la tabla y determina si los precios de la sandía y el melón de la tabla son nuevas combinaciones que cumplen con el costo total del *Paquete 1*.

Precio Melón	Precio Sandía	Precio Paquete 1	¿Las combinaciones de precios son posibles?
\$10	\$90	$5(10) + 2(90)$ $\checkmark \quad \checkmark$ $50 + 180 = 230$	Sí.

Figura 4. Estudiante 3, notación algebraica después de Graspable math

Una de las dificultades para resolver ecuaciones, según Filloy y Rojano, (1989) es que los estudiantes utilicen códigos personales dentro de la resolución de problemas algebraicos, y que esto suele ser algo común ya que los estudiantes se están familiarizando con el lenguaje algebraico, lo importante de estos códigos personales es que no se vuelvan inadecuados o que obstaculicen el desarrollo de las operaciones algebraicas.

En la etapa de desarrollo, se dificultó una de las actividades más importantes, que es la del primer despeje, no se esperaba que se tuviera tal dificultad en esta actividad por lo que en el pilotaje se tomó tiempo en avanzar ya que las estudiantes no sabían cómo despejar una ecuación de dos variables, este tipo de dificultad está relacionado con lo que menciona Kieran (2014) acerca de que los estudiantes no aceptan como resultado expresiones donde aún existan incógnitas, debido a que su pensamiento sigue arraigado al modelo aritmético y esperan encontrar como resultado valores numéricos. Al final, después de una larga explicación, las tres participantes lograron entender el despeje.

En la etapa de cierre se pudo observar que se logró cumplir con el objetivo general de la secuencia que es la comprensión del método de despeje y sustitución, sin embargo, también se observó que, las estudiantes tienen dificultad en la etapa de desarrollo de operaciones algebraicas dentro de este método.

### Conclusiones preliminares

Se puede concluir que la secuencia de despeje y sustitución requiere cambios menores ya que las observaciones que han encontrado hasta el momento no han sido de mayor impacto y algunas de las dificultades observadas en el pilotaje fueron previstas en el diseño de la secuencia.

Se encontraron dificultades específicas en manipulaciones algebraicas, que el software no las elimina por completo, pero si apoya a que dicho procedimiento sea más visual para los estudiantes.

Cada etapa de la secuencia concluyó de manera satisfactoria, puesto que se cumplieron los objetivos preliminares del diseño. También se pudo observar que las actividades globales y generacionales son más fáciles de desarrollar para los estudiantes y que se tiene dificultad en el desarrollo de las actividades transformacionales, por lo que tiene sentido que en la clase tradicional exista el enfoque a este tipo de actividades.

## Referencias y bibliografía

- Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM*, México, 10(04), 1-15.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 19-26. <https://www.jstor.org/stable/40247950>
- Landy, D., Weitnauer, E. & Ottmar, E. (2020). *Graspable math* [Aplicación web] <https://activities.graspablemath.com/>
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, 8(1), 139-151. <https://www.researchgate.net/publication/228526202>
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. (pp. 21-32). Springer, Dordrecht.
- Kieran C. (2014). Algebra Teaching and Learning. En Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_6)
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation en *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2(2), 707-762
- Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 17(3), 453-461.
- Proulx, J., Beisiegel, M., Miranda, H., & Simmt, E. (2009). Rethinking the teaching of systems of equations. *The Mathematics Teacher*, 102(7), 526-535.