

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Diseño de actividades para Álgebra Lineal mediante un sistema de aprendizaje abierto

Rita **Vázquez** Padilla

Universidad Autónoma de la Ciudad de México
México

rita.vazquez@uacm.edu.mx

Osiel **Ramírez** Sandoval

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
México

osiel.ramirez@uacj.mx

Miriam **Torres** Flores

Universidad Autónoma de la Ciudad de México
México

miriam.torres@uacm.edu.mx

Resumen

En esta propuesta se presentan los resultados de una investigación cuyo objetivo es diseñar actividades de construcción de conceptos de Álgebra Lineal para ser implementadas en un entorno digital específico (Grasple, una plataforma de aprendizaje abierto). La investigación se desarrolló en condiciones de enseñanza virtual en un contexto de formación matemática de futuros ingenieros. Los resultados de la etapa de diseño de tareas y de una implementación piloto muestran que el uso de Grasple como herramienta de aprendizaje impactó positivamente en los estudiantes, promoviendo el trabajo autónomo. Se discuten también las posibilidades que brinda un entorno digital como el mencionado para diseñar evaluaciones diferenciadas, en una modalidad en línea.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Superior; Enseñanza híbrida; Evaluación en línea; Investigación exploratoria; OLS (*Open Learning System*); Álgebra Lineal; México, Ciudad de México.

Introducción

El Álgebra Lineal es una de las materias fundamentales en la formación de ingenieros y matemáticos aplicados. Para que los estudiantes logren un manejo adecuado de los conceptos del Álgebra Lineal, es necesario que desarrollen una base conceptual sólida de conceptos como transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones y valores y vectores propios, más allá de los algoritmos o técnicas relacionadas con ellos. Promover la reflexión conceptual en los estudiantes es algo que suele ser un punto complicado en la enseñanza de esta materia. Diversos resultados de investigación se refieren a las dificultades que presentan los alumnos para comprender los conceptos del Álgebra Lineal, mismas que muchas veces, se ocultan tras un aparente manejo adecuado de las técnicas algorítmicas (Dorier, J.-L., & Sierpinska, A. (2001); Oktaç, A., & Trigyero, M. (2010); Villabona, et al (2020); Kawazoe, M (2022), etc)

Al diseñar tareas enfocadas no sólo en el manejo algorítmico sino también en la construcción de conceptos matemáticos, es posible lograr que los estudiantes puedan utilizar estos conocimientos de manera más efectiva en las materias de ciclo superior (disciplinas específicas) y en la práctica profesional, como se ha señalado “crear un ambiente con el propósito de presenciar la construcción de conocimiento” Oktaç (2019)

Después de más de dos años (2020 y 2021) haber estado en confinamiento, a consecuencia de contingencia sanitaria provocada por el COVID 19 (SRAS-CoV-2); el sistema educativo en su totalidad se vio afectado por el confinamiento derivado de la crisis sanitaria y emergió la necesidad de poner en marcha nuevas formas de enseñar y evaluar el aprendizaje en condiciones de virtualidad. En particular, la problemática señalada en torno a la enseñanza del Álgebra Lineal hizo evidente la necesidad de plantear formas nuevas de diseñar tareas que promovieran una adecuada construcción de conceptos en una situación en la que los estudiantes y los profesores ya no estaban frente a frente. También las formas de evaluación debieron ajustarse a una rápida curva de aprendizaje por parte de profesores e instituciones educativas. El manejo algorítmico de objetos como matrices, vectores y sistemas de ecuaciones fue rápidamente reemplazado por una multitud de herramientas digitales disponibles para los estudiantes, lo que, consecuentemente puso en entredicho la pertinencia de evaluaciones basadas únicamente en procedimientos algorítmicos.

En la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), institución de educación superior donde se llevó a cabo el experimento, se propone un modelo educativo centrado en el estudiante y que promueva el desarrollo de su autonomía. Apoyados en este principio, resulta necesario proponer a los estudiantes herramientas que apoyen su aprendizaje fuera de las horas de clase. Derivado de la crisis de COVID, la autonomía referida tomó una nueva dimensión, porque el estudiante no sólo tomaba un papel protagónico en su aprendizaje, sino que carecía de los espacios de consulta y asesoría con los profesores con los que contaba en la modalidad presencial.

Fue entonces que la tecnología ocupó un lugar fundamental para hacer frente a las actividades académicas. El software especializado para realizar cálculos matemáticos y particularmente para construir situaciones didácticas que permitieran un tratamiento en el ambiente virtual fueron ineludibles. Los recursos existentes en internet desde antes de la crisis

sanitaria fueron una tabla de salvación para estudiantes y profesores; entre ellos, podemos mencionar cursos completos en videos de Youtube, aplicaciones en línea para hacer cálculos, o plataformas como Khan Academy. Si bien los videos disponibles son recursos útiles para ejemplificar ciertas técnicas o procedimientos, resultan muy limitados para que los estudiantes desarrollen conocimiento de manera estructurada. Por otro lado, la retroalimentación que ofrecen plataformas como las mencionadas anteriormente, se restringe en la mayoría de los casos a devolver al estudiante un resultado binario (correcto/incorrecto). Asimismo, la dificultad de escribir símbolos matemáticos limita el tipo de interacciones que pueden establecerse entre el estudiante y el contenido que se les presenta. La interacción entre los estudiantes y la plataforma está limitada a la interfaz, siendo complicado que por ejemplo, escriban símbolos matemáticos para expresar sus respuestas. La evaluación sumativa de aprendizajes también se volvió un problema importante, porque en cuestión de días, cambiaron las condiciones tradicionales para evaluar en el aula y bajo supervisión.

Con base en la experiencia del equipo de investigación en el tema de construcción de conceptos en Álgebra Lineal (Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010); Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra, S. E. (2011); Dogan, H. (2018), etc) nos propusimos integrar una plataforma de aprendizaje para desarrollar ejercicios y problemas en los que los estudiantes pudieran trabajar de manera autónoma, tanto de forma asincrónica como sincrónica durante las clases en línea durante el año 2021, que promovieran un mejor entendimiento de los conceptos del álgebra lineal, más allá de lo puramente algorítmico y que pudieran ser evaluadas a distancia. A continuación, describiremos las características de la plataforma y los resultados de utilizarla en dos cursos de Álgebra Lineal.

Una plataforma de aprendizaje enfocada en matemáticas

Para desarrollar esta investigación se utilizó la plataforma *Grasple* (Grasple, 2022) que es una plataforma de tipo Sistema de aprendizaje abierto (*Open Learning System*). El usuario tiene a su disposición una colección de ejercicios de matemáticas, organizados en repositorios; es importante notar que la plataforma aparece en dos idiomas: inglés y neerlandés. Cubre varias disciplinas de matemáticas, con una mayor preponderancia de ejercicios en Estadística y Álgebra Lineal. Los ejercicios disponibles en la plataforma fueron desarrollados y compartidos por una comunidad de profesores, y son accesibles sin costo para cualquier usuario con acceso a internet. El repositorio de Álgebra Lineal cuenta con 582 ejercicios que cubren la mayoría de los temas que se abordan en los cursos universitarios. La plataforma se organiza en módulos, y en estos, es posible agregar lecciones (a manera de diapositivas), ejercicios de repaso, en los cuales el estudiante al responder recibe retroalimentación inmediata que se elabora a la par que se diseña un ejercicio. Es posible también seleccionar ejercicios del repositorio para conformar un test o evaluación, y controlar la ponderación e cada ejercicio de modo que luego de finalizarlo, el estudiante obtiene de inmediato una calificación sobre su desempeño.

Resaltamos las siguientes características de la plataforma: está basada en un sistema de álgebra computacional, lo que permite en particular, que el sistema califique como correctas o incorrectas dos respuestas que sean algebraicamente equivalentes, con varias posibilidades (por ejemplo, equivalencia algebraica, numérica con un error determinado; independencia lineal, entre otras), aunque no se escriban de manera idéntica. Su interfaz permite a los usuarios ingresar

notación matemática; -incluido código en LaTeX y la tercera característica es, que es posible, usando una cuenta de profesor, programar una retroalimentación inmediata de acuerdo a la respuesta correcta o incorrecta del usuario. También es posible diseñar nuevos ejercicios utilizando variables y parámetros, de modo que se pueden generar muchas versiones diferentes de un mismo tipo de ejercicio. El sistema tiene, además, un soporte estadístico con el registro de la actividad y el avance de los estudiantes, y genera estadísticas individuales de su desempeño evaluado de un 0 a un 100%.

Metodología y Resultados

Durante el semestre 2021-1 la plataforma se usó como un recurso complementario a las clases impartidas vía remota. El curso fue impartido por una de los miembros del equipo de investigación; en las sesiones sincrónicas por videoconferencia, la profesora incluía preguntas, actividades y ejercicios que habían ya sido desarrollados previamente en el marco de la teoría APOE (Dubinsky, 2014) y probadas en el entorno tradicional. Estas actividades se asignaban a los estudiantes y ellos las subían a un aula virtual, de una manera muy parecida a lo que se hacía en la modalidad presencial. En este sentido, el trabajo con GraspLe funcionó sobre todo para adentrarse en el uso de la plataforma, y ejemplificar a través de los ejercicios en línea y su correspondiente retroalimentación, las técnicas vistas en clase. Se destinó para ello media hora semanal, dentro de las cuatro sesiones de 90 minutos que comprende el curso. Para ello, se seleccionaron ejercicios y lecciones de los repositorios disponibles que se correspondieran con el programa de la materia. Aunque los ejercicios en GraspLe no fueron adaptados específicamente al curso, es de notar que en los repositorios ya existían ejercicios dirigidos a promover la reflexión conceptual, a través de preguntas de falso o verdadero, o de opción múltiple, además de aquellas más de tipo algorítmico, en las que los estudiantes respondían con un número, una matriz o una expresión algebraica, entre otros tipos de objetos. Como resultado de esta etapa se registraron las características generales observadas en el uso de la plataforma, particularmente las dificultades de los estudiantes para utilizarla. Una de las más importantes, fue el idioma y los errores de sintaxis al escribir las respuestas.

Con base en los resultados de la primera etapa, se planteó para el semestre 2021-2 una nueva versión del curso con una mayor importancia al trabajo en la plataforma. Además, se contó con el apoyo de un profesor de inglés para que los estudiantes reconocieran términos y expresiones comunes en matemáticas y su respectiva traducción. El trabajo en la plataforma, evaluado mediante el sistema propio de GraspLe, se contó como parte de la calificación del curso. En esta etapa, incluimos el diseño de ejercicios nuevos, en español, que se agregaron a los repositorios.

La retroalimentación, diseñada por nosotros, permitió acercar más el material en la plataforma al enfoque constructivista del curso. Los ejercicios nuevos se refirieron, sobre todo, a aplicaciones de los sistemas lineales. Una de las grandes ventajas que ofrece esta herramienta es la posibilidad de diseñar ejercicios usando parámetros, como el que se muestra en la Figura 1.

Considera el siguiente diagrama que muestra el flujo de tráfico. Considera estos valores para completar la información de la figura:
120=Numero 1, 40=Numero 2.

Escribe la matriz que modela este sistema en forma reducida por filas.

Check my answer

Figura 1. Ejercicio de aplicación de sistemas de ecuaciones diseñado para GraspLe.

Los datos que aparecen como parámetros (en la figura, etiquetados como Número 1 y Número 2) son distintos cuando el ejercicio se abre en dos sesiones distintas, es decir, cada estudiante ve un ejercicio con valores diferentes; la calificación del ejercicio y la retroalimentación toma en cuenta estos valores. De este modo, pudimos contar con una colección de ejercicios que, aunque similares, no tenían respuestas idénticas y esto fue un gran facilitador cuando estos ejercicios se eligieron para conformar evaluaciones. A los estudiantes se les pedía respaldar sus respuestas en GraspLe con un procedimiento escrito, de modo que los eventuales errores debidos a la sintaxis pudieran corregirse. Al finalizar el semestre 2021-2, los estudiantes respondieron una encuesta sobre el uso de GraspLe. Los resultados muestran una percepción positiva del uso de la plataforma no solo para resolver ejercicios, sino también para aprender la teoría y realizar exámenes. Asimismo, se señaló el problema del idioma como una de las principales dificultades para usarla.

Fue posible analizar la correlación entre la percepción de los estudiantes sobre su desempeño en temas específicos y el progreso medido por la plataforma, tanto de manera individual como grupal. En particular, se pudo observar un mejor desempeño en la resolución de problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones en comparación al usual, sin el uso de la plataforma. En la presentación en la conferencia se presentarán algunos de estos resultados.

La tercera etapa se desarrolló ya en modalidad presencial. Esta etapa se caracterizó por un diseño de actividades enfocadas a la construcción del concepto de Espacio vectorial, uno de los que se han reportado como más difíciles en el aprendizaje del Álgebra Lineal. Se tomó como base la descomposición genética (DG) propuesta por Parraguez y Oktaç (2010), y se diseñó un cuestionario con el objetivo de identificar las construcciones mentales propuestas en la DG para ejercicios en los que aparecieran operaciones no usuales, y espacios vectoriales distintos de \mathbb{R}^2 . Luego de la implementación del cuestionario en un grupo de 35 estudiantes, se analizaron los resultados y se identificaron problemas específicos asociados a la construcción objeto de los elementos del espacio vectorial, así como los mecanismos de coordinación necesarios para verificar los axiomas de suma y producto por escalar. Con base en lo anterior, se diseñaron nuevos ejercicios en GraspLe, que actualmente están siendo implementados. Los resultados de las investigaciones se reportarán próximamente.

Conclusiones

El uso de una plataforma como GraspLe puede promover una mejor comprensión de los conceptos abstractos del Álgebra Lineal, al permitir al estudiante obtener retroalimentación sobre sus respuestas, en un formato que incluye no solo números sino otro tipo de objetos matemáticos. En términos de evaluación, permite al profesor generar reactivos diferenciados, lo que facilita la evaluación en condiciones de virtualidad. Los estudiantes que usaron la plataforma durante la época de pandemia muestran una percepción positiva de su uso en relación a su aprendizaje y al trabajo autónomo. Permite poner en relieve también las dificultades asociadas al idioma en la comprensión de lectura en matemáticas y el uso de tecnología. Desde el diseño de tareas, la posibilidad de incluir distintos tipos de respuestas y parámetros en los ejercicios facilita la elaboración de ejercicios variados que permitan a los estudiantes interiorizar propiedades de los objetos matemáticos.

Referencias y bibliografía

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory—A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Cham: Springer
- Dogan, H. (2018). Mental schemes of linear algebra visual constructs. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and strategies in teaching linear algebra* (pp. 219–239). Cham: Springer.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85–124). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_2
- Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255-273). Springer, Dordrecht. https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47231-7_24
- GraspLe. (2022, 1 de octubre). GraspLe. Open interactive Math & Stats exercises. <https://www.graspLe.com/>
- Kawazoe, M. (2022). Relation between understandings of linear algebra concepts in the embodied world and in the symbolic world. <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2020/hal-03113855v1>
- Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(4), 373–385. <https://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-ii/499-201021d>
- Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2112–2124. <https://doi.org/10.1016/J.LAA.2009.06.034>
- Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra, S. E. (2011). El Concepto de Transformación Lineal: una Aproximación Basada en la Conversión Gráfico-Algebraica, con Apoyo de GeoGebra. *Formation à La Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 38–49.
- Villabona, D., Camacho, G., Vázquez, R., Ramírez, O., & Oktaç, A. (2020, September). Process conception of linear transformation from a functional perspective. In *INDRUM 2020*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03113850>