XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023

xvi.ciaem-iacme.org

# Utilizando el Juego de los ocho elementos para transitar entre varios modos de pensamiento

Martha Cecilia **Mosquera** Urrutia
Universidad Surcolombiana
Colombia
martha.mosquera@usco.edu.co

**Resumen**

En el taller utilizo el Tangram triangular para ilustrar el tránsito entre los modos de pensamiento Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estructural planteados por Sierpinska, el objetivo es motivar la reflexión sobre la pertinencia del material didáctico para conceptualizar, rescatando la importancia de la geometría y el sentido espacial intuitivo para el desarrollo del pensamiento matemático.

Para lograrlo, he dividido el taller en cuatro partes: primero, muestro inconvenientes al implementar el tangram en el aula (problema didáctico) y en las otras tres a partir de la pregunta: ¿para qué quiero este tangram? Ilustro conceptos como: variables y constantes, expresiones algebraicas y métodos de razonamiento para construir demostraciones, como formas de transitar entre lo práctico y lo teórico con tangrams reticulares, conexos, divisibles y subtangrams.

Se ha logrado desarrollar actividades desde preescolar hasta superior y avanzar en la identificación de puntos críticos en la enseñanza del área de regiones planas.

*Palabras clave:* Modos de pensamiento; Tangrams; Tangram chino; Tangram triangular; recubrir el plano; fórmulas área; Área y superficie; Formación de profesores; Ministerio de Educación Nacional; Colombia.

## Introducción

Quizá muchos de nosotros hemos tenido la oportunidad de ver, oír hablar o experimentar con un tangram, este milenario rompecabezas inventado al parecer por los chinos y al que ellos dieron el nombre de tabla de la sabiduría.

Resulta fácil conseguirlo o construirlo y son muchos los docentes especialmente de matemáticas e investigadores que han dedicado largos y valiosos esfuerzos al desarrollo de actividades específicas de geometría (especialmente) utilizándolo como material didáctico (Elffers (1982); Russell y Bolonia (1982); Wang y Hsiung (1992); Fernández-Blanco, (2003); Siew, Chong y Abdullac (2013)) hace algunos años yo también asumí esa tarea, pero la experiencia demostró que si el seguimiento que el maestro hace de las actividades propuestas no es puntual, el recurso se puede convertir en un dolor de cabeza y lo que al parecer es motivante para los niños y las niñas se puede volver para ellos y ellas en una tortura.

Un ejemplo claro de esta situación lo presencié en una escuela donde la maestra les dejó a los niños de tarea "plantear 50 sumas de fracciones utilizando las fichas del tangram, en cada caso dibujarlas y dibujar la suma y además construir una o varias figuras con las fichas que arman la solución". Otra situación similar viví cuando una amiga me trajo a su niño para que le orientara el desarrollo de una tarea: "construir un tangram igual al tangram chino, pero con seis piezas más", el niño afirmaba que le era imposible hacer la tarea porque si el nuevo tangram debía ser igual al tangram chino, ¿cómo podía tener seis piezas más? No pude más que maravillarme con el ejercicio de interpretación del lenguaje que estaba haciendo el niño, y entonces con su mamá tomamos la mala decisión de enviarlo con ese interrogante donde la maestra, quien lo evaluó con insuficiente y además le citó a la mamá para decirle que ella estaba impidiendo que el niño desarrollara la creatividad y que además con su actitud permisiva y displicente estaba logrando que el niño no le dejara hacer la clase; cuando la señora me contó decidí ir personalmente a hablar con la maestra y al interrogarla sobre el por qué y el para qué de esa tarea… ella, no supo responderme nada; finamente nos tocó dejar así por sugerencia del director de la escuela quien nos dijo que nos estábamos ahogando en un vaso de agua y que con nuestra actitud lo único que lograríamos sería perjudicar al niño.

Situaciones como estas; el trabajo con los niños, profesores de educación básica y media, profesores en formación, motivaron la realización de este trabajo, cuya pretensión es mostrar algunas posibilidades que tiene el tangram para orientar cursos de acción pedagógica y proyectos de aula centrados en el desarrollo de habilidades de pensamiento más que en la enseñanza de contenidos declarativos.

Con los tangrams he logrado desarrollar actividades que cubren desde el nivel preescolar hasta la educación superior para desarrollar temas específicos, como por ejemplo perímetro y área de figuras planas, el concepto de fracción y las operaciones entre ellas, las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°, el desarrollo de algunas habilidades de pensamiento como: comparación, clasificación, inducción, deducción, y actividades de matemática recreativa.

Cabe anotar que a lo largo de este proceso de investigación he diseñado otros tangrams y puesto en uso algunos que aunque no están en el mercado ni son tan conocidos como el tangram chino, ofrecen valiosas oportunidades de desarrollo como el *juego de los ocho elementos* o *tangram triangular* que es el recurso fundamental utilizado durante el desarrollo de este taller.

## Ideas fundamentales que guían los modos de pensar el área de una superficie en este trabajo

Desde el modo Sintético Geométrico para el Área de Regiones Planas SG-ARP (Mosquera 2020) se asume que dos superficies tienen la misma área cuando son equidescomponibles, es decir … es posible descomponer una de ellas en un número finito de partes, las cuales pueden rearreglarse para formar la otra (Moratalla, 1989), por esa razón en este taller son procesos fundamentales: reconocer, superponer, desplazar, medir y transformar superficies.

Desde un modo Analítico Estructural AE-ARP tomamos la definición axiomática de área que se presenta en el Cálculo de Apostol V. 1 (Apostol y Cantarell, 1999. P.73).

Supongamos que existe una clase $\mathscr{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto *a*, cuyo dominio es $\mathscr{M}$, con las propiedades siguientes:

1. *Propiedad de no negatividad*. Para cada conjunto $S$ de $\mathscr{M}$, se tiene $a(S) \geq 0$.
2. *Propiedad aditiva*. Si $S$ y $T$ pertenecen a $\mathscr{M}$, también pertenecen a $\mathscr{M}$, $S \cup T$ y $S \cap T$, y se tiene $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$.
3. *Propiedad de la diferencia*. Si $S$ y $T$ pertenecen a $\mathscr{M}$ siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ está en $\mathscr{M}$, y se tiene $a(T - S) = a(T) - a(S)$.
4. *Invariancia por congruencia*. Si un conjunto $S$ pertenece *a* $\mathscr{M}$ y $T$ es congruente a $S$, también $T$ pertenece a $\mathscr{M}$ y tenemos $a(S) = a(T)$.
5. *Elección de escala*. Todo rectángulo R pertenece a $\mathscr{M}$ Si los lados de $R$ tienen longitudes $h$ y $k$, entonces $a(R) = hk$.
6. *Propiedad de exhaución*. Sea $Q$ un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones $S$ y $T$, de modo que $S \subseteq Q \subseteq T$ Si existe uno y sólo un número $c$ que satisface las desigualdades $a(S) \leq c \leq a(T)$ para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan $S \subseteq Q \subseteq T$ entonces $Q$ es medible y $a(Q) = c$.

Estos axiomas nos permiten asignar al área de un conjunto medible un número positivo o nulo; determinar relaciones numéricas para el área de diversas regiones, también nos da la posibilidad de ordenar, sumar, restar y en particular aproximar la medida del área usando el método de exhaución y asignar área igual a cero a cualquier recta o segmento de recta. Las ideas que subyacen a estos axiomas pueden ser ilustradas para facilitar su comprensión utilizando un tangram.

En el trabajo de Aguilera y Flórez "*comparación de áreas de figuras por estudiantes de primero de magisterio*" se establece una diferencia fundamental entre la *magnitud superficie* y el *proceso de medir la magnitud superficie*:

"La magnitud superficie como el conjunto cociente T/R = M, con una operación interna, suma, y una relación de orden #, compatible con la suma, es decir, (M, +, #). T es el conjunto de los polígonos del plano y R es la relación definida en T como sigue: Sean p y p' elementos de T: pRp' ⇔ existen dos descomposiciones T1, T2, ..., Tn de p y T1', ..., Tn' de p y p', respectivamente, tal que un movimiento del plano que transforma Ti en Ti'. La suma definida en

M: [p]+[p’] = [q ∪ q’], donde q y q’ son representantes de dichas clases (llamadas cantidades de superficie), con la condición de ser contiguos. En M podemos definir una operación externa B, sobre un semianillo A, de manera que estructure a M de semimódulo.

Medir la magnitud superficie consiste en representar cada una de las cantidades por un número, de modo que a cada cantidad le corresponda un número y recíprocamente. Para ello se fija una cantidad [u] = U de M, a la que se llama unidad, y comparamos cualquier cantidad de M con ella, por medio de la operación externa. Es decir, la medida es un isomorfismo que conserva el orden, entre el semimódulo M y el semimódulo A”.

El modo Analítico Aritmético consistente en expresar el área de una región a partir de una fórmula que permite calcular AA ARP, es el que se usa más comúnmente, de manera general las personas asocian el área con una fórmula, dejando de lado los procesos de medición tan importantes para desarrollar el pensamiento.

Otras ideas fundamentales son: el concepto de área no depende de la forma y los conceptos área y superficie no son sinónimos, de ahí la importancia de comprender las propiedades inherentes a la magnitud superficie; las fórmulas que usamos para calcular el área son relativas porque dependen de la unidad de medida que elijamos, por ello para desarrollar esta idea fundamental, en algunos apartes usaremos el *triángulo equilátero* de lado una unidad como unidad de medida de la superficie, triángulos consecutivos, cadenas de triángulos y polígonos equivalentes.

**El tangram triangular o juego de los ocho elementos.**

El juego de los ocho elementos es un tangram de ocho piezas que resultan al hacer cortes especiales en un triángulo equilátero, su objetivo al igual que el de los otros tangrams es formar con sus ocho elementos determinadas figuras que pueden ser geométricas o no, atendiendo al principio de utilizar siempre las ocho y no colocar una sobre la otra. A diferencia del tangram chino la persona que diseñó este nuevo tangram pensó en que todas las piezas fueran diferentes, éste hecho, y el de que tenga una pieza más, hace que las figuras sean más difíciles de armar mejorando así la capacidad mental, la ubicación espacial y el razonamiento.

Para construirlo, el triángulo equilátero se divide en 36 triángulos que también son equiláteros (como se muestra en la Figura #1) cada uno de ellos se llama triángulo básico y si lo tomamos como unidad de área se observa que las áreas de las respectivas figuras son 1,2,3,4,5,6,7, y 8, triángulos básicos. Cada una recibe el nombre según su área. (ver Figura #2)

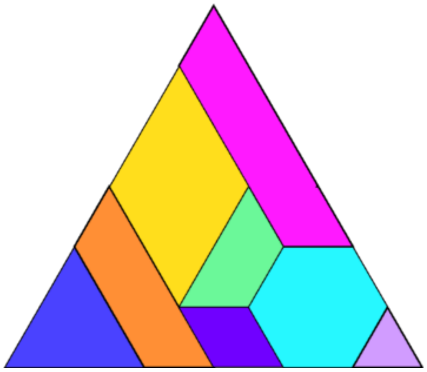

*Figura 1.* Tangram triangula o juego de los ocho elementos

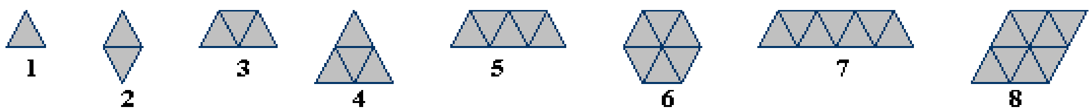


*Figura 2.* Piezas del juego de los ocho elementos

El hecho de que el triángulo básico de este tangram sea equilátero, hace que su estudio matemático sea mucho más sencillo, pues mientras en el tangram chino el triángulo básico tiene dos ángulos y dos lados de diferentes medidas; en éste, los tres ángulos y los tres lados tienen respectivamente las mismas medidas (esta ventaja se aprovecha fuertemente en la parte de álgebra).

Con este tangram el estudio de las fracciones como parte de la unidad y las operaciones entre ellas se puede ampliar ya que mientras en el tangram chino sólo se tienen las fracciones

$$\frac{1}{4}\square, \frac{1}{8}\square, \text{ y } \frac{1}{16}\square$$

y sus múltiplos; en este se pueden trabajar directamente las fracciones

$$:\frac{1}{36}\Delta, \frac{1}{18}\Delta, \frac{1}{9}\Delta, \frac{1}{6}\Delta, \frac{1}{4}\Delta, \frac{1}{3}\Delta, \frac{1}{2}\Delta$$

y sus múltiplos.

**¿Cómo utilizo los tangrams para el desarrollo del pensamiento?**

En la segunda parte del taller, propongo la comprensión de algunos conceptos básicos de álgebra utilizando el juego de los ocho elementos, lo primero es encontrar significado a expresiones algebraicas dentro de un contexto netamente geométrico, a través de la observación de cada una de las piezas que componen el tangram y su comparación con la figura base, asociando expresiones algebraicas a perímetros y áreas de figuras planas.

Posteriormente, demostraremos algunas identidades algebraicas y realizaremos ejercicios de mayor grado de complejidad como, por ejemplo: demostrar que con las piezas del juego de los ocho elementos solo es posible construir cinco polígonos convexos

Posteriormente trabajemos otro tipo de razonamiento con los tangrams reticulares, conexos y divisibles.

## Referencias y bibliografía

Apostol, T. M., & Cantarell, F. V. (1999). Calculus: volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Reverté.

Castro Martínez, E., Flores Martínez, P., & Segovia Alex, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas. Suma.

Chamorro, M.C. y Belmonte, J.M. (1989*). El problema de la medida*. Madrid, Síntesis.

Elffers, J. (1982): El tangram. Juego de formas chino, Labor, Barcelona.

Fernández Blanco, M. T. (2003). Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino. Suma.

Luque, C. J., Mora, L. C., & Torres, J. A. (2006). El concepto de área.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Moratalla, P. T. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete,* (3), 235-256.

Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática. Valparaiso: Ediciones Instituto de Matemática de la pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Russell, DS y Bolonia, EM (1982). Enseñanza de la geometría con tangramas. *El profesor de aritmética* , 30 (2), 34-38.

Segovia, I., Castro, E., & Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 10, 63-67.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Routledge.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education. In Activity and Sign, 117-135.

Siew, N.M.., Chong., C.L. y Abdullah., M.R. (2013). Facilitando el pensamiento geométrico de los estudiantes a través del aprendizaje basado en fases de van hiele utilizando tangram. *Revista de Ciencias Sociales* , 9 (3), 101.

Urrutia, M. C. M. (2000). De La Geometrıa al Algebra Pasando por el tangram. *Memorias del XI Encuentro de Geometria y sus aplicaciones*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Wang, F.T. y Hsiung, C.C. (1942). Un teorema sobre el Tangram. *The American Mathematical Monthly* , 49 (9), 596-599.