

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Número racional: significado y representaciones semióticas

Osmar Erlin **Andrade** Mosquera

Universidad del Quindío

Colombia

oeandradem@uqvirtual.edu.co

Eliécer **Aldana** Bermúdez

Universidad del Quindío

Colombia

eliecerab@uniquindio.edu.co

Humberto **Colorado** Torres

Universidad del Quindío

Colombia

colorado@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta ponencia hace parte de un estudio más amplio, en la formación doctoral, que trata sobre el pensamiento numérico y el objeto matemático de los números racionales. El objetivo es lograr una comprensión duradera y consciente de este concepto en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa en Colombia. Para ello, se ha utilizado un marco teórico semiótico cognitivo: los Registros de Representación Semiótica. En el aspecto metodológico, se optó por la Ingeniería didáctica en sus fases. Los resultados permiten concluir que hay dificultades iniciales en la construcción de este concepto. Debido, a que están acostumbrados a trabajar solo en el conjunto de los números naturales y el de los enteros. Además, existen dificultades en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro. Porque, no hay coordinación entre los diferentes registros y no logran comprender que dos representaciones distintas pueden representar un mismo objeto matemático.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática; Educación secundaria; Aprendizaje; Cognitivismo; Pensamiento Numérico; Valle del Cauca; Colombia.

Introducción

El aprendizaje y comprensión del número racional en los estudiantes, en las últimas tres décadas no ha mejorado (Lortie-forgues, Tian & Siegler, 2015). A pesar de las reformas que se han incorporado en el sistema educativo y los numerosos estudios sobre su enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar. Permitir que los estudiantes alcancen un desarrollo en la comprensión conceptual de este objeto matemático permitirá el éxito académico, profesional y ocupacional, por la presencia de éste en todas y cada una de las áreas del saber y en la vida cotidiana. Con el fin de mejorar los aprendizajes en los estudiantes en el objeto matemático de los números racionales, se ha utilizado como marco teórico los Registros de Representación Semiótica. Ya que estos permiten la movilización de estos registros de representación para la comprensión de este concepto en los estudiantes. En ese sentido, Duval (2004), expresa, que “sin semiosis no hay noesis”. Es decir, que sin registros de representación no hay comprensión del objeto matemático estudiado. Este estudio tuvo como propósito lograr una comprensión duradera y consciente de los números racionales, a través de la habilidad de cambiar de un registro de representación a otro, en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa en Colombia.

Referentes teóricos

Significado y representación de los números racionales

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, un aspecto importante y problematizador que se resalta en las investigaciones en educación matemática y en didáctica de las matemáticas, es distinguir un objeto matemático de su representación (Duval, 2004) y en especial, saber qué es lo que este designa. Por lo tanto, Iori (2017) afirma que es ingenuo confundir objetos reales con los objetos matemáticos, ya que los objetos matemáticos carecen de referencias ostensivas. De la misma manera Duval (2017) distingue de acuerdo con el modo de acceso a los objetos, dos tipos de objetos epistemológicamente. El primero es *accesible a través de la percepción*. Es decir, que es una relación de causa y efecto. Porque se accede a ellos de manera directa y multisensorial o indirecta y monosensorial, recurriendo a la utilización de instrumentos para su representación. El segundo tipo es que hay *objetos que no son accesible en absoluto*, ni si quiera con la utilización de un instrumento. Es decir, que para acceder a estos tipos de objetos que presentan una relación referencial, es necesario utilizar *sistemas de signos*. Iori (2017) apoyándose en Duval (2009), dice que normalmente en la educación matemática se tienden a confundir cuatro realidades de objetos: “el objeto como cosa, el objeto intencional, el objeto fenomenológico y el objeto de conocimiento” en cada uno de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este caso el objeto matemático se hace referencia al objeto de conocimiento. Aunque objeto matemático para Duval “es precisamente la invariante (operacional o lógico discursiva) de una multiplicidad de representaciones semióticas” y que “el objeto de conocimiento surge, pues, del reconocimiento de que dos o más representaciones representan el mismo objeto, independientemente de sus contenidos” (Iori, 2017, p.278).

En ese sentido, Pecharromán (2013) considera que los objetos matemáticos representan una funcionalidad a partir del contexto. Y que esta funcionalidad a su vez está determinando la representación y el significado del objeto. La representación permite la expresión y uso del

objeto. El significado atiende a la interpretación del objeto” (Pecharromán, 2014, p. 112). En el aspecto de la representación se hace necesario porque el *objeto matemático necesita ser expresado*. A través de los tres tipos de signos: *iconos* (registros semióticos: analógicas (gráficas, y geométricas), las digitales (verbales, numéricas y algebraicas)), *los símbolos* (+, =, 2, etc.) y *los índices* (son las letras). El aspecto de la interpretación se hace necesario, porque el *objeto matemático necesita ser interpretado*. Porque, las diferentes interpretaciones que pueda presentar un objeto conforman su significado. Y este, se “desarrolla desde la caracterización y discriminación de la funcionalidad que representa a través de la expresión discriminatoria del objeto, de su uso funcional y de las relaciones del objeto” (Pecharromán, 2014, p. 114).

Del mismo modo, Pecharromán (2014) enfatiza que un objeto matemático es aprendido de manera adecuada si *atiende al aspecto representacional (iconos, símbolos, índices) que lo configura*, es decir, a su expresión y propiedades como también al *desarrollo de un significado personal sobre este* desde su experiencia, que le permite llegar a su interpretación y caracterización. Además, esta significación se da a través de los aspectos de la expresión discriminatoria, el uso funcional del objeto y las relaciones del objeto con otros.

A través del tiempo, el proceso de enseñanza y los procesos de aprendizaje del concepto de números racionales en el ámbito escolar ha sido complejo, tanto para el docente que lo enseña como para el estudiante que lo intenta aprender, debido a las diferentes formas de representación en las que se relaciona y se visualiza el concepto, así como lo expresan Brousseau, Brousseau, & Warfield (2014), (Nicolaou & Pitta-pantazi, 2016). Estos autores afirman que los orígenes de las dificultades en el aprendizaje se relacionan con las distintas variedades de formas que se utilizan en su representación (medición, proporción y operación); habitualmente, se enseñan como si todos los significados fueran equivalentes. Con el tiempo, “el resultado es que el estudiante debe aceptar muchas cosas simplemente en la base que el docente lo dice, y en el largo plazo no tiene una base coherente para los conceptos” (Brousseau, et al., 2014).

Los estudios referenciados sobre las representaciones de los números racionales resaltan la importancia de utilizar diferentes registros de representaciones apropiados para una comprensión conceptual completa de los números racionales (Qiu & Wang, 2021), como se muestra en la figura 1. Ya que esta multiplicidad de representaciones permite conectar conceptos abstractos, símbolos, algoritmos, lenguajes verbales y gráficas visuales. Además, porque entre estas se dan la transición de una representación a otra. Las representaciones graficas externas continuas de áreas como el círculo y el rectángulo se debe promover no solo desde la partición de las áreas iguales, sino también desde las áreas que no sean iguales en tamaño. Del mismo modo, en estas áreas no solo proponer realizar las acciones de dividir la unidad, sino también de reconstruir la unidad.

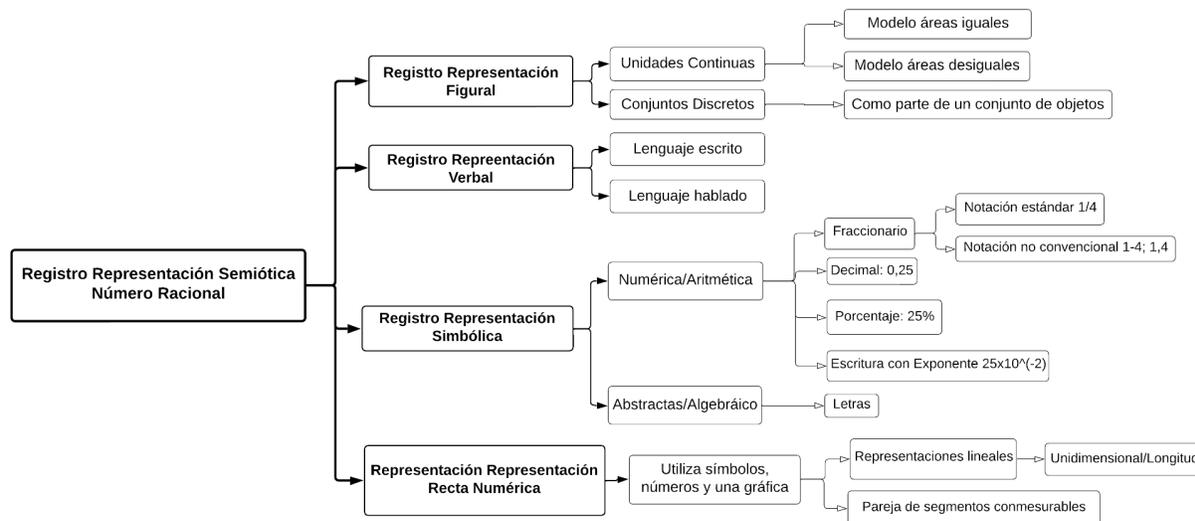


Figura 1. Los diferentes registros representación semiótica del número racional (elaboración propia). Se muestra los cuatro registros y subregistros en los que se puede representar el número racional.

La habilidad para cambiar los registros de representación

Las dificultades de comprensión en los estudiantes, de los conceptos introducidos en el aula. Llevó a la didáctica de las matemáticas a realizar muchas investigaciones en relación con la adquisición del conocimiento matemático y las secuencias de actividades, con el fin de favorecer el progreso en el pensamiento matemático. Pero, los estudios aún no tienen una respuesta clara de cómo introducir a la mayoría de los estudiantes en el aprendizaje de los modos del pensamiento matemático. Un ejemplo claro de esos modos explica Duval (2006), es la habilidad para cambiar el registro de representación.

El pensamiento matemático es independiente de toda actividad semiótica. Ya que ésta es secundaria y externa. Duval (2006) presenta dos observaciones a los objetos de conocimiento matemático en los “contextos de representación”:

- ❖ La actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”. Por ejemplo, los números naturales se pueden representar con material como cerillas (IIII IIII), con puntos, con una representación poligonal, y también con el sistema de notación decimal, que tiene un signo algo extraño, el cero.
- ❖ Pero los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos. (p.144-145)

Es importante no caer en la interpretación superficial de que los contextos de representación están distantes de una comprensión matemática, sólo por ser representaciones externas. “Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran” (Duval, 2006, p.145). Así mismo, Duval (2006) afirma que los dos requisitos cognitivos que se deben considerar de manera conjunta y que se involucran para analizar la actividad matemática en relación con la comprensión de los problemas de aprendizaje están relacionados en un primer momento por la propiedad de **transformación** entre las representaciones semióticas. Porque en

matemáticas, “el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas y los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo” (Duval, 2006, p.145). Y en un segundo momento por la **coordinación interna** entre diversos sistemas de representación que se eligieron. Porque “sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos contextos de representación diferentes del mismo objeto” (Duval, 2006, p.145).

Los aprendizajes vinculados a un proceso de enseñanza se forman a través de las representaciones semióticas. Y en estas, se presentan tres actividades cognitivas en el cual se fundamentan. La formación, el tratamiento y la conversión son las tres actividades cognitivas inseparables de las representaciones semióticas. Las últimas dos actividades conforman la transformabilidad de las representaciones semióticas. Porque permiten que de una representación se puedan elaborar otra u otras representaciones semióticas. En pocas palabras, “la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas en la perspectiva de elaborar nuevas representaciones. Todo el progreso de conocimientos en matemática pasa por este trabajo de transformación” (Duval, 2004a, p.44).

Las reglas de conformidad que rigen en la formación de las representaciones semióticas permiten aceptar las representaciones producidas, mejorando la comunicación y el empleo de los procedimientos de tratamientos que permiten o son posibles dentro del sistema semiótico. Estas cumplen también una función de identificación del sentido para quien se encuentra frente a una representación, que no es el mismo que la produjo” (Duval, 2017a, p.78). Es importante tener presente que, en las representaciones semióticas, la indagación y su comprensión no se limita a la competencia de la práctica de las reglas de conformidad. Ya que,

la formación de las representaciones semióticas es, en efecto, más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad. La formación implica la selección de un cierto número de caracteres de un contenido percibido, imaginado o ya representado en función de las posibilidades de representación propias al registro escogido. (Duval, 2017a, p.78)

Aspectos metodológicos

Este estudio, utiliza la ingeniería didáctica, como metodología potente de investigación en educación matemática, con el propósito de desarrollar en los estudiantes de educación básica, la comprensión conceptual de los números racionales, mediante los registros de representación semiótica. El paradigma investigativo que se utilizará permitirá entender el fenómeno desde una perspectiva contextualizada y no generalizada; es decir, desde el punto de vista de los actores estudiados. Además, se aprende desde lo relativo al mundo social, las experiencias y puntos de vista de los individuos, la riqueza interpretativa, la profundidad de las ideas y los significados que arrojen de los datos. Hasta el momento el estudio en desarrollo se ha logrado aplicar un instrumento cuestionario abierto como prueba diagnóstica y la recolección de la información se tiene con base en este instrumento. La prueba permitió observar el estado de comprensión que presentan los estudiantes de los números racionales. Los estudiantes que participaron en el estudio fueron 21 del grado 7° de Educación Básica Secundaria de la sede Central, anexa a la Institución Educativa El Queremal, que pertenece al sector oficial, del municipio del Dagua-Valle del Cauca. Ellos son estudiantes de ambos sexos, que tienen un rango de edad que oscila entre los 12 y los 15 años. Los niveles socioeconómicos están entre el estrato 1 hasta el estrato 3.

El instrumento cuestionario abierto constaba de 9 ítems, descrito como lo muestra la tabla 1: en el primero se presentó registros figurales con áreas continuas iguales y desiguales, con el propósito que se hiciera la conversión a un registro simbólico en notación estándar. En el segundo, se esperaba que dibujaran o colorearan según el registro fraccionario escrito, teniendo en cuenta los registros figurales completos o incompletos. En el tercero, el propósito era realizar la conversión a un registro en notación decimal según el registro fraccionario dado. En el cuarto, se presentó dos registros en la recta numérica, se esperaba que escribieran un registro fraccionario para cada recta numérica. En el quinto, se les presentó dos registros, uno en lengua materna y el otro como representación numérica fraccionaria, con propósito de que dibujaran la recta numérica y ubicaran las fracciones descritas en ellas. En el sexto, se les presenta un registro figural con un conjunto discreto de corazones, varios pintados de algunos colores (rojos, azules y amarillos) y se les pidió hallar la fracción que indica cada color dentro del conjunto discreto. En el séptimo, se pretendía que escribieran el porcentaje y la fracción que se indica en el registro verbal escrito. En el octavo se les presentó dos problemas de distribución equitativa en un registro verbal escrito y se esperaba la respuesta en un registro fraccionario y figural. En el último se les presenta un registro figural con áreas contiguas desiguales y se esperaba la conversión en un registro fraccionario.

Resultados

El instrumento cuestionario abierto como prueba diagnóstica que se aplicó para la recolección de la información consta de nueve ítems, como lo muestra la siguiente tabla. En el cual los estudiantes tuvieron un tiempo de dos horas para resolverlo.

Tabla 1
Estructura del instrumento cuestionario

Ítems	Representación inicial	Representación final (conversión)
1.	Registro figural con áreas continuas iguales (a, b y c) y áreas desiguales (d y e)	Se les sugería pasar a un registro simbólico fraccionario en notación estándar
2.	Registro simbólico fraccionario en notación estándar	Debian dibujar y colorear el registro figural con áreas continuas iguales y áreas desiguales
3.	Registro simbólico fraccionario en notación estándar	Debian convertir el registro simbólico fraccionario en notación estándar a un registro simbólico en notación decimal
4.	Registro recta numérica unidimensional	Se les sugería ubicar el registro simbólico fraccionario en notación estándar en la recta numérica
5.	Registro simbólico fraccionario en notación estándar (a) y registro verbal escrito (b).	Se les sugería dibujar el registro recta numérica unidimensional y ubicar los registros simbólicos
6.	Registro verbal escrito y Registro figural de conjuntos discretos	Se les sugería pasar a un registro simbólico fraccionario en notación estándar
7.	Registro verbal escrito	Se les sugería pasar a un registro simbólico fraccionario en notación estándar y porcentaje
8.	Registro verbal escrito	Se les sugería pasar a un registro simbólico fraccionario en notación estándar y dibujar un registro figural
9.	Registro figural con áreas continuas desiguales	Se les sugería pasar a un registro simbólico fraccionario en notación estándar

Nota. Se muestra los diferentes ítems de representaciones iniciales que se les presentó a los estudiantes para que realizaran las conversiones apropiadas.

En los resultados de la aplicación del instrumento cuestionario abierto se puede evidenciar que los estudiantes presentan mayores desempeños y habilidades al escribir la fracción estándar de un registro figural con áreas continuas con un 76% y cuando deben dibujar o colorear un registro figural según la fracción indicada con un 62% y 86%. Pero, sus desempeños y habilidades no son los esperados cuando las áreas son desiguales con un 10% o deben escribir el decimal que resulta de una fracción con un 0%. También cuando tienen que dibujar una recta numérica 0% o escribir su fracción con un 5%. Además, hallar el porcentaje o la fracción de un conjunto discreto con un 14% y por último resolver problemas que impliquen repartos equitativos con un 5% y 10%.

Conclusiones

El aprendizaje del concepto de número racional presenta muchas dificultades (Lortieforgues, Tian & Siegler, 2015). Pero, se puede llegar a comprender si se tienen en cuenta el desarrollo de las diferentes subconstrucciones y su interrelación entre sí, como: parte-todo, relación, operador, cociente y medida, que presenta las fracciones (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). A través, de las diferentes representaciones del objeto, las situaciones reales, los símbolos hablados y escritos, las imágenes y los modelos concretos. El aprendizaje se maximiza significativamente cuando se interactúa con diversas situaciones reales o modelos concretos que median entre el mundo real y el mundo matemático. Asimismo, se debe permitir interactuar con las diferentes formas de representación y que estas se puedan pasar de una representación a otra. En ese sentido, la conceptualización del número racional debe permitir superar la separación entre número y la magnitud; al mismo tiempo, reconocer y distinguir con qué variable de unidad (simples y compuestas) y de magnitud (continuas y discretas) se está trabajando en los procesos de enseñanza y de aprendizajes.

En el cambio de registro de representación del número racional se evidencian que el concepto de fracción no se desarrolla sino se han construido el componente semántico de los significados que se atribuyen y el componente sintáctico de las notaciones de esos significados (Valdemoros, 2004). Dentro de la actividad matemática, un estudiante demuestra que ha comprendido conceptualmente el número racional cuando es capaz de: realizar múltiples representaciones en diferentes registros. Sin perder de vista, que así, estas representaciones estén en diferentes registros, representan el mismo número racional Nicolaou & Pitta-pantazi (2016). De este primer atributo se desprende el segundo, que es el de “reconocimiento”. Es decir, reconocer el mismo concepto cuando se presenta en múltiples representaciones. Luego, efectuar transformaciones de tratamiento y conversión en los registros semióticos de representación como los de lengua natural, el numérico y figural (figuras de una y dos dimensiones). Por último, presentar los argumentos de los procesos que ejecutaron en cada transformación. En ese sentido, se hace necesario impulsar más el uso de la presentación gráfica externa de la recta numérica. Porque, es una herramienta significativa y convencional que genera mayores dificultades y esfuerzo cognitivo al momento de aprenderla y los desempeños de los estudiantes en esta representación son inferiores con respecto de las otras representaciones. Consecuentemente Duval (2006) considera que la conversión fundada en la coordinación de los registros es el umbral de la comprensión y un salto cognitivo en aras de desarrollar una comprensión integrativa.

Referencias y bibliografía

- Duval, R. (2004). *Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. PeterLang S.A. *Sémiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Segunda ed.). (1. Myriam Vega Restrepo, Trad.). Universidad de Valle, I. E. P., Grupo de Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia: Merlin I.D.
- Duval, R. (2017a). *Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. *Sémiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*. Segunda edición. Traducción Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali, Colombia. Programa Editorial Universidad de Valle.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking The Registers of Semiotic Representations*. Tânia M. M; Proem Editora, Ed. Springer International Publishing.
- Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (Traducción Myriam Vega Restrepo.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 275–291. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3>
- Pecharrmán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática*, 26(2), 111–133.
- Pecharrmán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*, 31(1), 121–134.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. doi: 10.1007/978-94-007-2715-1
- Nicolaou, A. A., & Pitta-pantazi, D. (2016). Hierarchical Levels of Abilities that Constitute Fraction Understanding at Elementary School. 757–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9603-4>
- Charalambous, Y. C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293–316. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>
- Qiu, K., & Wang, Y. (2021). Conceptual distinctions and preferential alignment across rational number representations. *European Journal of Psychology of Education*, 36(3), 865–881. <https://doi.org/10.1007/s10212-020-00502-4>
- Lortie-forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Valdemoros, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 7(003), 235–256. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100004