

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Valor y vector propio como concepto central de un curso de álgebra lineal

Natalia Garzón

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

Nataliagarzon197@gmail.com

Solange Roa Fuentes

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

roafuentes@gmail.com

Resumen

Este documento muestra avances de una investigación que tiene como objetivo diseñar y desarrollar el ciclo de investigación de la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año (16 – 19 años). Para esto se exponen los elementos que componen la teoría APOE como referente teórico y metodológico de la investigación. Se describen los tres componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE que norman el diseño y desarrollo del proyecto. Finalmente se muestra un avance sobre el Análisis Teórico que destaca elementos cognitivos que sustentan el diseño del ciclo de investigación.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación universitaria; Valores y vectores propios; diseño de tareas; Álgebra lineal.

Introducción

El aprendizaje del álgebra lineal a menudo resulta difícil para los estudiantes, debido a la gran cantidad de nuevas definiciones, teoremas y operaciones. Según diferentes investigadores esto representa una fuerte carga cognitiva a la hora de comprender conceptos básicos de esta área de las matemáticas (Stewart et al., 2018; Thomas y Stewart, 2011; Oktaç y Trigueros, 2010; Dorier, 2000). La presentación tradicional de esta asignatura no evidencia un concepto de estudio que sirva de referente para el estudiante, en el caso de un curso básico de cálculo, dicho concepto

puede ser el de derivada. Esto puede llevar a que el aprendizaje del álgebra lineal se base principalmente en la memorización y aplicación de algoritmos algebraicos que no permiten la reflexión del estudiante. En particular en esta investigación se estudian aspectos relacionados con la comprensión del concepto de valor y vector propio, que se propone como concepto central de un curso de álgebra lineal.

Los estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias que desarrollan en sus programas un curso de Álgebra Lineal de la Universidad Industrial de Santander (Colombia), no son ajenos a esta problemática. En dicha institución es posible encontrar diferentes y muy diversos contenidos y desarrollos dentro de los cursos, que no reflejan la naturaleza generalizadora y unificadora del álgebra lineal. Por tanto, el propósito de esta investigación es diseñar y desarrollar el Ciclo de investigación de la teoría APOE para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un primer curso de álgebra lineal de la Universidad Industrial de Santander. Nos referimos a un concepto central, como aquel concepto que para su construcción necesita conectarse con otros conceptos fundamentales de la disciplina; además, un concepto central debe permitirles a los estudiantes acercarse a la naturaleza generalizadora y unificadora, en este caso del álgebra lineal (Dorier et al., 2000). La importancia que tiene el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz simétrica se centra en las múltiples aplicaciones a la ingeniería, entre las que cabe destacar: el problema de la diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante, entre otras.

El concepto de valor y vector propio ha sido estudiado desde la perspectiva de la Educación Matemática desde hace casi dos décadas (Parraguez et al., 2020; Betancur, 2020; Karakok, 2019; Salgado y Trigueros, 2015; Gol Tabaghi, 2014; Thomas y Stewart, 2011). Es posible identificar categorías de estudio del concepto de vector y valor propio desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, estas están relacionadas con: la representación del valor y vector propio (Parraguez et al., 2020; Karakok 2019; Caglyan, 2015; Gol Tabaghi 2014); las dificultades relacionadas con lo algorítmico (Thomas y Stewart, 2011); el análisis de libros de texto (Betancur, 2020); y análisis cognitivos del valor y vector propio (Parraguez et al., 2020; Betancur, 2020; Karakok, 2019; Salgado y Trigueros, 2015).

Bajo este panorama, se propone el siguiente objetivo de investigación: Diseñar y desarrollar el ciclo de investigación de la teoría APOE para posicionar al valor y vector propio como un concepto central de un curso de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander. A continuación se describen los principales referentes teóricos, así como algunos avances en el diseño del Ciclo de investigación.

Teoría APOE: Constructos teóricos y metodológicos

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de la Educación Matemática desarrollada en sus inicios por Ed Dubinsky y el grupo de investigadores de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés). Dubinsky toma el concepto de Abstracción Reflexiva planteado por Piaget, para explicar principalmente cómo un individuo pasa de un estado de conocimiento a otro (Arnon et al., 2014). La teoría APOE es una teoría cognitiva que permite describir cómo un estudiante puede

comprender los conceptos matemáticos y aporta aspectos clave para su enseñanza. Para esto define constructos teóricos principalmente identificados como mecanismos y estructuras mentales que organiza y relaciona en modelos cognitivos definidos como: Descomposiciones Genéticas.

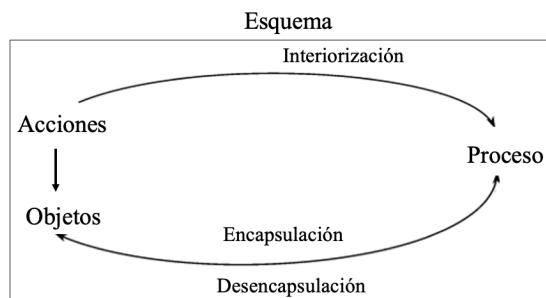


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al., 2014, p.18)

La Figura 1 muestra las estructuras mentales y la manera como se relacionan a través de mecanismos que propician su construcción. La construcción de un concepto puede iniciar por la aplicación de Acciones como las estructuras más básicas, pero no menos importantes, que pueden dar paso a la construcción de un concepto o noción matemática. Una Acción es una transformación o un conjunto de transformaciones que pueden ser aplicadas sobre un Objeto construido previamente. Las Acciones son percibidas por el individuo como algo externo. Esta estructura se caracteriza generalmente por realizarse paso a paso en un orden específico; en diferentes investigaciones las Acciones se han relacionado con la aplicación de algoritmos o procedimientos. Una Acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. La teoría APOE propone que la evolución de las Acciones surge a partir de la reflexión que el individuo potencia gracias a su experiencia aplicándolas repetidamente al resolver situaciones que involucran el concepto en construcción. Las transformaciones que se aplican gracias a un estímulo externo se interiorizan en un Proceso, la interiorización es el mecanismo que permite la reflexión del individuo sobre aquello que realiza. Tal como menciona Dubinsky (1997):

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas. (p. 96)

La estructura Proceso es una Acción interiorizada, que el individuo ya no tiene que realizar paso a paso. Como resultado de la interiorización, el individuo reflexiona previamente para determinar el alcance o validez de cada paso que antes realizaba en la Acción. Así, puede decidir si aplicar o no todos los pasos o hacerlo en un orden diferente. Los Procesos se explican desde la teoría APOE como el resultado de la interiorización de Acciones o como la coordinación de dos o más procesos. El mecanismo de coordinación permite poner dos o más Procesos juntos y estructurarlos en un único Proceso. La importancia del mecanismo de coordinación radica en que la evolución de las estructuras asociadas a la construcción de un

concepto matemático, requieren de un único Proceso para dar paso a su encapsulación y por ende a su evolución en un Objeto. Un Proceso evoluciona en un Objeto gracias al mecanismo de encapsulación; este mecanismo permite el paso de una estructura dinámica a una estática. De tal manera que el foco de atención del individuo está en determinar el tipo de nuevas Acciones que son posibles aplicar sobre él para generar Objetos de la misma naturaleza. Otra manera de promover la encapsulación se relaciona con estructurar el concepto como un elemento que pertenece a un conjunto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; 2012).

A continuación, se presenta el Ciclo de investigación que guía el diseño y desarrollo de esta investigación.

Ciclo de Investigación

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que fundamenta el diseño, la implementación y validación de descomposiciones genéticas. Este ciclo está compuesto por tres componentes: i. Análisis teórico, ii. Diseño e implementación de un modelo de clase y iii. Recolección y análisis de datos. A continuación, se describe el diseño de cada componente y se muestran los primeros avances de la investigación.

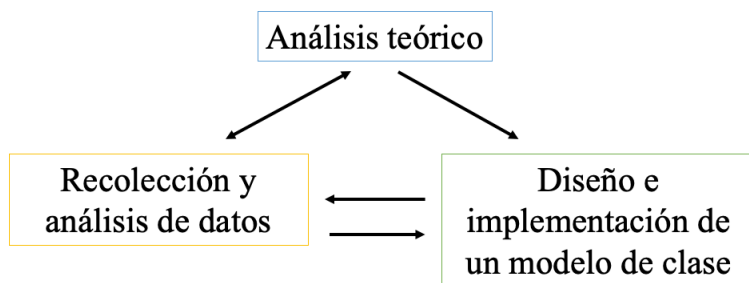


Figura 2. Ciclo de investigación (adaptado de Arnon et al., 2014, p. 94)

Análisis Teórico

El análisis teórico en esta investigación parte de una reflexión sobre la necesidad de organizar el desarrollo curricular de un curso de álgebra lineal que hace parte del programa de estudiantes de ingeniería y ciencias en una universidad pública de Colombia. Para esto se toman como referentes de estudio diferentes investigaciones en didáctica del álgebra lineal, que incluye: el análisis de libros de texto, la identificación de dificultades, el estudio de aspectos epistemológicos y análisis cognitivos de conceptos fundamentales del álgebra lineal.

Como un primer resultado de los elementos estudiados en esta componente, se decide tomar el concepto de valor y vector propio como concepto central que guía el desarrollo conceptual del curso.

Dado que el resultado principal de esta componente consiste en una descomposición genética, se toman como referente los análisis construidos previamente sobre el concepto de valor y vector propio y se destacan aspectos para tener en cuenta. Además, se parte de tres descomposiciones genéticas sobre el concepto de valor y vector propio (Salgado y Trigueros,

2015; Parraguez et al., 2020; Betancur et al., 2022) para destacar las relaciones que logran establecer con conceptos como: sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal y transformación lineal. Con base en lo anterior se quiere diseñar un modelo cognitivo genérico que destaca la construcción del valor y vector propio como eje central de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año.

Diseño e implementación de un modelo de clase

Esta componente parte de la reflexión sobre los contenidos fundamentales del curso, a partir del estudio de diversos análisis teóricos desarrollados previamente y que se asocian principalmente con el concepto de valor y vector propio. En esta investigación participan un promedio de 30 estudiantes universitarios de primer año que desarrollan un curso de álgebra lineal (16-25 años) de la Universidad Industrial de Santander, ubicada en Bucaramanga (Colombia). Para desarrollar esta componente se toma como fundamento el ciclo ACE, este ciclo es considerado por la teoría APOE como una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) Actividades; (C) discusión en el aula; (E) Ejercicios.

Las actividades que se proponen buscan potenciar la construcción de cada uno de los conceptos requeridos para desarrollar el concepto de valor y vector propio, apoyadas en las de estructuras mentales de la descomposición genética preliminar. Para esto se toma la definición de Tarea dada por Trigueros y Oktaç (2019):

Para nosotros, una tarea matemática, una situación problemática o una actividad pueden implicar diversos grados de profundidad de conocimiento y razonamiento matemático, así como conexiones con conceptos en dominios no matemáticos, según los objetivos de investigación o enseñanza que se persigan. Nuestro enfoque será, desde una perspectiva APOE, en los principios de diseño que motivan la construcción de conceptos específicos (p. 2).

El desarrollo de las tareas se hará de manera grupal e individual, se realizarán cada dos semanas durante el desarrollo de un semestre académico con duración aproximada de dos horas. Para las actividades grupales se pedirá a los estudiantes conformar grupos de tres que permanecerán constantes todo el semestre. Las tareas que se propone diseñar en esta componente buscan potenciar la construcción de cada uno de los conceptos requeridos para desarrollar el concepto de valor y vector propio, apoyadas en las de estructuras mentales de la descomposición genética preliminar. Con base en la discusión en clase, se espera que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando y construyan estructuras mentales que fomenten la comprensión de los conceptos.

Recolección y análisis de datos.

En esta investigación se realiza una constatación de datos a través de la aplicación de cuestionarios de clase y entrevistas didácticas individuales y grupales que buscan determinar el avance de los estudiantes en la comprensión de conceptos relacionados al valor y vector propio. Cada vez que se aplican estos instrumentos se retroalimenta la componente anterior y se toman decisiones sobre el desarrollo del curso. Además, la descomposición genética propuesta en la primera componente se refina, esto permite describir con mayor detalle las estructuras y los mecanismos considerados inicialmente.

Comentarios finales

Los resultados de esta investigación se consideran fundamentales para las decisiones de diseño y desarrollo de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año. Esto dado que permite guiar el desarrollo de los contenidos, establecer la naturaleza de las tareas y por tanto el nivel de comprensión que los estudiantes pueden alcanzar sobre los principales conceptos del álgebra lineal. Esta investigación busca establecer una conexión entre los resultados teóricos ofrecidos desde APOE en Educación Matemática y la práctica de las aulas de matemáticas.

Referencias y bibliografía

- Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory a framework for research and curriculum education. *New York: Springer Netherlands*.
- Betancur, A. (2020). Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Betancur, A., Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y los eigenvectores refinación de un modelo cognitivo. *AIEM – Avances de investigación en educación matemática*, 22, 23 – 46. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4005>
- Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors’ linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131-153.
- Campos, V. (2017). Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
- Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 1–81). *Grenoble, Francia: Kluwer Academic Publishers*.
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA*, 85- 106.
- Gol, S. (2012). Dynamic geometric representation of eigenvector. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 53 –58).
- Karakok, G. (2019). Making connections among representations of eigenvector: what sort of a beast is it? *ZDM*, 51(7), 1141-1152.
- Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 199-232.
- Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 89-112.
- Salgado, H. (2015). El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal. Instituto Politecnico Nacional, Mexico.

- Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). *Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers*.
- Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. *Springer*.
- Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. 23, 275 - 296.
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55.