

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Matemáticas y realidad en la formación de docentes

Uldarico **Malaspina** Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen

La estrecha relación entre realidad y matemáticas está en la base del avance de las matemáticas, la ciencia y la tecnología y, en esa línea, muchos educadores matemáticos opinan que la modelización matemática – que es una actividad que implica una transición de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas – debería introducirse desde la educación primaria; sin embargo, en la formación de los docentes no se provee las bases adecuadas para esta actividad. Ante este reto para investigadores y educadores, algunas experiencias tenidas en talleres presenciales y virtuales, muestran que una manera pertinente de iniciar a los docentes y futuros docentes en los procesos de creación de modelos matemáticos a partir de situaciones reales, es mediante la creación de problemas por elaboración, como una actividad que estimule la intuición y ponga énfasis en la indagación, las conjeturas y los supuestos, en estrecha relación con la resolución de problemas.

Palabras clave: Modelización Matemática; Formación de profesores; Creación de problemas; Resolución de problemas; Indagación.

Introducción

Es muy grande la responsabilidad de los docentes de todos los niveles educativos en la formación de los futuros profesionales, técnicos y ciudadanos en general. La realidad actual es muy compleja y tremendamente desafiante, tanto por la predominancia de la incertidumbre – evidenciada con la pandemia – como por la existencia simultánea de grandes avances tecnológicos y de grandes problemas para la humanidad, que se arrastran por siglos. La sociedad del conocimiento y la información, con el impacto de la inteligencia artificial, puede estar muy

alejada de comunidades en zonas rurales de la costa, la sierra o la selva, con lenguas nativas, a las que no llega la señal de internet. Más aún, el avance de la tecnología y sus aportes al desarrollo industrial traen también nuevos problemas como el calentamiento global y, por otra parte, el uso de los teléfonos celulares y las redes sociales impactan el comportamiento individual y colectivo de niños y adultos y, en consecuencia, se generan nuevas formas de aprender, que exigen nuevas formas de enseñar.

Quienes estamos en el mundo de la educación matemática – en la investigación o en la docencia – tenemos el reto permanente de usar los elementos que nos brinda la realidad concreta de nuestros estudiantes para buscar formas eficaces de involucrarlos en un aprendizaje acorde con sus motivaciones y que sea estimulante de sus capacidades de autoaprendizaje, de indagar, de intuir, de conjeturar, de cuestionar, de demostrar, y de identificar, crear y resolver problemas. Desarrollar estas capacidades en los estudiantes cobra mayor importancia en tiempos en los que los investigadores informáticos se esfuerzan por producir computadoras que simulen lo más posible el pensamiento de los humanos y, paradójicamente, los humanos tienden a usar más las diversas formas de computadoras para resolver sus problemas. Esto es parte del desafío de la realidad actual y de afrontarla buscando formas creativas de ser aliados de la tecnología en la gran tarea educativa. Actualmente existen programas de matemática dinámica con gran potencialidad en la formación del pensamiento matemático si al usarlos en sesiones de aprendizaje se pone énfasis en las conjeturas y demostraciones, más allá de las ventajas que brindan de ahorrar esfuerzos, al efectuar fácil y rápidamente gráficos y cálculos. Evidentemente, todo esto requiere una adecuada formación de los docentes, tanto en las universidades y otros centros de educación superior, como en los cursos y talleres de formación continua para profesores en servicio.

La modelización matemática, entendida como un proceso de creación de un modelo matemático, a partir de una situación real y como una actividad que implica una transición de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas (Borromeo, 2018), es el campo ideal para formar profesores que tengan la capacidad de inducir a sus estudiantes a observar y aprender disfrutando de la estrecha relación entre las matemáticas y la realidad. En este sentido, Bonotto (2010) afirma que una introducción temprana en las escuelas, de las ideas fundamentales sobre modelización, no solo es posible sino también deseable, incluso en la escuela primaria. También Lesh y Doerr (2003) nos dicen que actividades provocadoras de modelización deberían empezar en el jardín infantil. Sin embargo, en la formación de los docentes no se provee las bases adecuadas para la modelización matemática, no se pone el suficiente énfasis en ella, se simplifica o se restringe demasiado a modelos lineales, o suele tomarse de manera aislada en la formación general. Ante este gran reto para investigadores y educadores, algunas experiencias tenidas en talleres presenciales y virtuales, muestran que una manera pertinente de iniciar a los docentes y futuros docentes en los procesos de creación de modelos matemáticos, es mediante la creación de problemas a partir de situaciones dadas, reales o muy cercanas a la realidad, como una actividad motivadora y creativa, que estimule la intuición y ponga énfasis en la indagación, las conjeturas, los supuestos y la formalización, en estrecha relación con la resolución de problemas.

Creación de problemas y modelización matemática

Evidentemente, una fuente importantísima de problemas de matemáticas es la realidad. Muchas veces son problemas específicos de la vida cotidiana, como estimar el tiempo que tomará ir de determinado lugar a otro y muchas otras son consecuencia de la búsqueda de explicaciones a determinados hechos, de la necesidad de predecir eventos o de buscar formas óptimas de atender necesidades. La historia nos muestra que la observación reflexiva de la realidad, el descubrimiento de relaciones y patrones, la selección de información, el hacer representaciones y otras elucubraciones de la mente, lleva a explicitar y resolver algunos problemas particulares, que luego se van refinando y generalizando y así surgen modelos matemáticos que se ajustan progresivamente con la interrelación entre la matemática y la verificación de lo obtenido en una nueva mirada a la realidad.

Esta mirada histórica y amplia, que nos lleva al campo de la modelización matemática – de importancia innegable en la formación de los estudiantes – es un marco adecuado para valorar el énfasis que se debe poner, desde los primeros grados de la educación escolar, en la creación de problemas de matemáticas a partir de situaciones específicas, como un proceso que estimula el pensamiento reflexivo y creativo, la indagación y el aprendizaje de las matemáticas en relación estrecha con la realidad. En este sentido, English (2003) sostiene que a pesar de que la creación de problemas ocurre de manera natural en la vida cotidiana, no recibe la debida atención en las aulas. Añade que “los niños desarrollan procesos de creación de problemas cuando ellos participan activamente en situaciones problemáticas que los involucran en la exploración, el cuestionamiento, la construcción y el refinamiento de ideas y relaciones matemáticas”. El camino para brindar estas experiencias a los niños será más fácil, si los docentes se inician en la modelización matemática teniendo sus propias experiencias en la creación de problemas y verificando por ellos mismos la importancia de estos procesos, en lo matemático y en lo didáctico,

Estrategias y fases en la creación de problemas

Según el enfoque de Malaspina (2015) y Malaspina, Torres y Rubio (2019), se consideran dos estrategias básicas para la creación de problemas: 1) por *variación*, cuando se obtiene un nuevo problema a partir de un problema dado, modificando uno o más de sus cuatro elementos – información, requerimiento, contexto y entorno matemático – y 2) por *elaboración*, cuando se obtiene un problema sin partir de un problema dado. Generalmente se parte de una situación real o una configurada, con características de real, aunque bien puede ser también una situación en un contexto intra-matemático.

Las experiencias didácticas tenidas en diversos talleres con docentes han llevado a identificar cuatro fases en la creación de problemas, cíclicamente interrelacionadas entre sí (Malaspina 2022): la *indagación* (de una situación o de un problema dado); la *propuesta* de un problema tentativo relacionado con la situación o el problema dado; la *resolución* (o intento de resolución) del problema propuesto; y el *refinamiento* o el cambio del problema propuesto. En las interrelaciones entre estas fases, las preguntas juegan un papel muy importante, como se ilustra en la Figura 1.

Los casos de creación de problemas por elaboración, partiendo de una situación en un contexto extra-matemático, son los que más contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático ligado a la realidad y los que más favorecen – a docentes y estudiantes – a iniciarse en procesos de modelización matemática, como se ha observado en diversas experiencias didácticas y como se puede percibir examinando la representación gráfica (Figura 2) del ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007), comparativamente con las fases de creación de un problema (Figura 1). Las fases 1 y 2 de modelización matemática están vinculadas con la indagación; las fases 3 y 4 con la propuesta y resolución de un problema y las fases 5, 6 y 7 con el refinamiento del problema propuesto.



Figura 1. Fases en un proceso de creación de problemas. Elaboración propia.

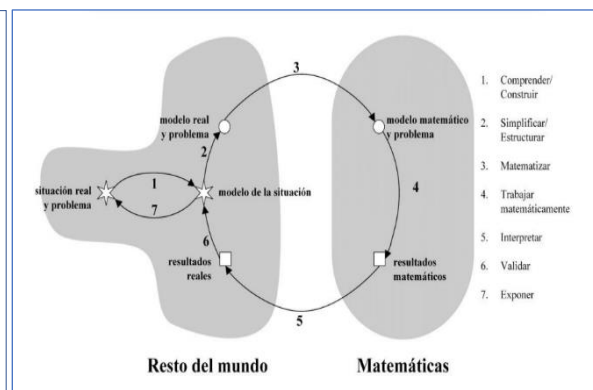


Figura 2. Ciclo de modelización de Blum y Leiß
Adaptado por Ledezma, Sol, Sala-Sebastià y Font (2022)

En las sesiones de creación de problemas con docentes, sea por variación o por elaboración, se suele llegar a interesantes niveles de reflexión didáctica y matemática, sobre todo en la fase de refinamiento; inclusive se llega a formular preguntas cuyas respuestas requieren un entorno matemático que va más allá de lo inicialmente considerado (Malaspina, 2015). En ese sentido, es muy importante la selección del problema inicial o de la situación inicial para una sesión de creación de problemas, de modo que no solo haya un enriquecimiento matemático sino también la oportunidad de reflexionar la realidad, más allá de lo estrictamente matemático, formulando supuestos pertinentes y verosímiles, así como previendo diversos casos. Los problemas o situaciones abiertas ayudan mucho a ello y, por cierto, siempre hay que tener cuidado que los problemas o situaciones tengan autenticidad, en el sentido que estimulen una pregunta significativa asociada con un evento plausible, contribuyendo a que los estudiantes se sientan más motivados y pongan atención a la situación mientras desarrollan soluciones matemáticas (Palm, 2008); más aún, es importante evitar que las situaciones o problemas sean forzadamente “realistas” como cuando se afirma que “Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie de un estanque siguiendo una función $y = -x^2 + 6x + 12$ donde y es la distancia al fondo del estanque (medida en metros) y x el tiempo empleado (medido en segundos)”. Al trabajar con niños, el mundo de los juegos ofrece situaciones de autenticidad, que son parte muy cercana a su realidad y a sus motivaciones, que estimulan emociones positivas para el aprendizaje y favorecen experiencias de creación de problemas y de juegos a partir de situaciones lúdicas, inclusive desde temprana edad y en el marco del pensamiento probabilístico, como se muestra en Malaspina (2021) así como en Malaspina y Malaspina (2020). Al trabajar en

el nivel universitario, hay experiencias en las que, partiendo de situaciones de compra-venta de abarrotes – mediante estímulos para la creación de problemas – se llega a la formulación de funciones discontinuas de una y dos variables (Malaspina y Torres, 2019).

Una experiencia didáctica

Se muestra una de las experiencias didácticas desarrolladas con docentes peruanos de secundaria, en talleres de trabajo colaborativo de creación de problemas por elaboración, como formas de relacionar la matemática con la realidad, a partir de situaciones abiertas. Esta experiencia está tratada con amplitud y detalle en Malaspina (2022)

Situación:

A los docentes se les mostró la siguiente figura, tomada de Internet.



Figura 3: Un grifo averiado que ocasiona goteo de agua.

Y se les preguntó: *¿Podemos crear algún o algunos problemas a partir de esta situación?*

Proceso de creación de problemas

Los docentes formularon propuestas y preguntas, como las siguientes,

- Calcular la cantidad de agua que se desperdicia.
- Obtener el costo extra que genera el desperdicio por ese goteo.
- Relacionar el tiempo con el goteo.
- ¿En qué tiempo se llenaría una taza? (Lo cual requeriría una observación empírica.)
- ¿Qué cantidad de agua se desperdicia en un día?

Con estas consideraciones y preguntas, algunos integrantes del grupo propusieron el siguiente enunciado de un primer problema tentativo:

Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño¹.

Ante el intento de solución, se advirtió la falta de información, por lo cual, luego de intercambiar ideas matemáticas y didácticas en el grupo de profesores, de hacer supuestos

¹ En el Perú, al referirse al goteo de agua por un grifo averiado, suele decirse: “goteo de agua por un caño malgrado”. Esta expresión aparece en las intervenciones de los profesores.

verosímiles, de plantear nuevas interrogantes, de proponer nuevos problemas tentativos, de intentar resolverlos y de hacer refinamientos a los problemas tentativos, se llegó al siguiente problema:

Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.

La solución fue la representación gráfica (solo en el primer cuadrante) de una función lineal relacionando tiempo en horas con cantidad de agua en mililitros. Se marcó explícitamente los puntos de coordenadas (3; 240) y (6, 480). (Figura 4)

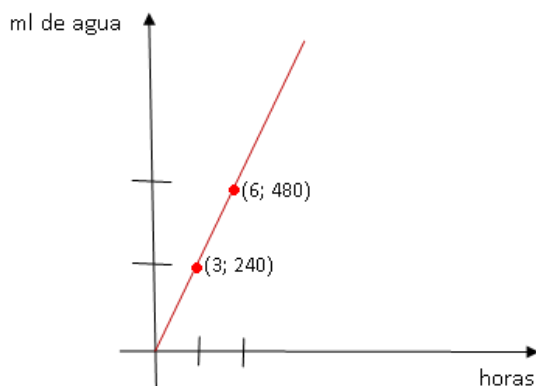


Figura 4. Una representación gráfica de una función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia, en la situación dada.

Algunos docentes llegaron a explicitar la expresión algebraica de la función:

$$f(t) = 80t, \text{ para } t \geq 0. \quad (1)$$

Podemos percibir las interrelaciones entre las cuatro fases ya mencionadas en la creación de un problema. La indagación y la propuesta llevó a un primer problema tentativo; el intento de solución y más indagaciones llevaron a un primer refinamiento de tal problema y a un segundo problema tentativo; y así, con nuevas indagaciones, propuestas, intentos de solución y refinamientos – que son formas de transitar de ida y vuelta entre matemáticas y realidad – se llegó al problema enunciado.

Indagaciones y transiciones adicionales de ida y vuelta entre realidad y matemática, a partir del problema propuesto, conducen a cuestionarse si la función obtenida y mostrada en (1) refleja bien la realidad del goteo de agua por el grifo. Así, lo obtenido y representado gráficamente es una función continua; sin embargo, el goteo de agua no es un hecho que se dé continuamente, pues entre una gota y la siguiente transcurre un tiempo en el que la cantidad de agua desperdiciada se mantiene constante. Esto lleva a tener en cuenta que cada cierto tiempo cae una gota de agua. Suponiendo que cada 2 segundos cae una gota de agua – que es un supuesto simplificador, pero verosímil y en el marco de la proporcionalidad – se representa gráficamente una parte de la función de desperdicio de agua, considerando tiempo en segundos y agua en mililitros (Figura 5) y asumiendo que en la caída de cada gota se desperdician $\frac{2}{45}$ ml de agua. Se consideran los 6 primeros segundos de observación.

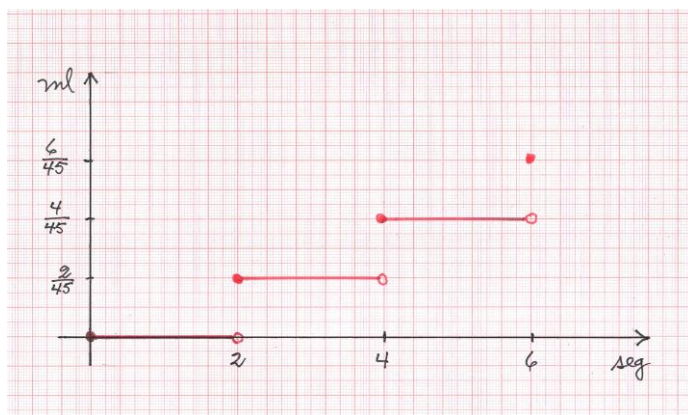


Figura 5. Una representación gráfica de la función desperdicio de agua, atendiendo la discontinuidad en el goteo, en 6 segundos.

En la Figura 5 se tiene una representación gráfica de una función “máximo entero” o “mayor entero”, que es discontinua por saltos y cuya expresión formal es

$$d(t) = \frac{2}{45} \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil, \text{ para } t \geq 0. \quad (2)$$

Vemos que, mediante la creación de problemas por elaboración, una primera aproximación a la situación real mostrada, lleva a una función lineal expresada en (1), pero una mayor indagación y transiciones de ida y vuelta entre la matemática y la realidad, llevan a una función no lineal y discontinua, representada gráficamente en la Figura 5 y formalmente en (2). Este es un tema que no es usual tratarlo en la secundaria, pero debe estar muy presente en la formación y experiencias didácticas de los profesores, de modo que contribuya a trabajar con sus estudiantes situaciones reales que lleven – con el apoyo de la intuición – a representaciones en este entorno matemático, como la mostrada en la Figura 5.

Consideraciones finales

Las reflexiones presentadas y la experiencia didáctica expuesta nos hacen tomar conciencia de la importancia de una adecuada formación de los docentes – tanto inicial como continua – y como parte de ella considerar la creación de problemas, sobre todo por elaboración, como una forma de evidenciar la estrecha relación entre realidad y matemáticas, de sentar bases para su formación en modelización matemática y de potenciar sus competencias didácticas y matemáticas. (Malaspina, Torres & Rubio, 2019).

La realidad social, cultural, económica, política, ambiental y tecnológica, y la vida cotidiana como parte de ella, es una rica fuente de problemas matemáticos que requieren ser identificados, no solo para explotarlos tanto didáctica como matemáticamente, sino para aportar a sus soluciones. Es un gran reto para docentes e investigadores seleccionar problemas o situaciones que generen emociones positivas para el aprendizaje y contribuyan a que los estudiantes, con un pensamiento matemático apoyado en la intuición, tengan una mirada crítica y reflexiva de la sociedad en que viven. Es necesario apoyarse en situaciones ricas en contenido

matemático, tanto del legado cultural de nuestros antepasados, que los encontramos en sus obras de arte y construcciones, como en los avances tecnológicos, cada vez más desafiantes con la inteligencia artificial, para contribuir a una formación integral de nuestros estudiantes.

Para avanzar en la línea de enseñar matemáticas, más y mejor vinculadas con la realidad, se hacen necesarias algunas medidas concretas en los planes de estudio y de actualización de los futuros docentes y de los docentes en servicio de la educación básica, tales como: 1) Considerar con énfasis, la creación de problemas – estrechamente relacionada con la resolución de problemas – en todas las sesiones de aprendizaje de matemáticas, de modo que no sea una actividad aislada; 2) Brindar cursos-taller de modelación matemática, teniendo como base las experiencias en creación de problemas, sobre todo por elaboración; y 3) Enriquecer la formación matemática y la intuición científica tratando temas y analizando situaciones que contribuyan a tener mayores elementos para identificar y resolver problemas de la realidad, vinculados con las ciencias físicas, biológicas, humanas, sociales, económicas, etc. En ese sentido, es fundamental estimular el pensamiento probabilístico y estadístico, así como el pensamiento optimizador de los docentes de todos los niveles de la educación básica. Para los docentes de secundaria sería muy enriquecedor que se les brinde ocasiones de examinar situaciones problemáticas de la realidad, en las que se use conceptos básicos de algunos temas usualmente no tratados en los planes de estudio, como teoría de juegos, teoría de grafos, aritmética modular, funciones de dos variables y curvas de nivel,

Referencias y bibliografía

- Bonotto, C. (2010). Realistic mathematical modeling and problem posing. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 399-408). Springer, Boston, MA.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Dussel, I. y Trujillo Reyes, BF. (2018). ¿Nuevas formas de enseñar y aprender? Las posibilidades en conflicto de las tecnologías digitales en la escuela. *Perfiles Educativos*, 40 (SPE), 142-178.
- English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. K. Jr. Lester (Ed) *Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekindergarten-grade 6* (pp. 187-198). NCTM.
- Ledezma, C.; Sol, T.; Sala-Sebastià, G.; Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics* 10, 33-39. <https://doi.org/10.3390/math10183339>
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia en la XIV CIAEM, México. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1485/607
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17.

- Malaspina, U. (2022). Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18(64).
<https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/661>
- Malaspina, U. & Torres, C. (2019). Teaching of discontinuous functions of one or two variables: A didactic experience using problem posing and levels of cognitive demand. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2578 - 2585). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME
- Malaspina, M., & Malaspina, U. (2020). Game Invention as Means to Stimulate Probabilistic Thinking. *Statistics Education Research Journal*, 19(1), 57-72.
- Malaspina, U., Torres, C. & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, & L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151). Springer.
- Palm, T. (2008). Impact of Authenticity on Sense Making in Word Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58.