Geometría: una herramienta para explorar el mundo físico y matemático

Beatriz Elena **Londoño** Flórez
Iniciativa Ciencia y Tecnología para Todos, @SciTechXE
Colombia
blondono@gmail.com
Ana Cecilia **Agudelo** Henao
Universidad Nacional
Colombia
acagudeloh@unal.edu.co
Juan Carlos **Granada** Echeverry
Universidad del Valle
Colombia
juan.granada@correounivalle.edu.co
Rubén Antonio **Vargas** Zapata
Universidad del Valle
Colombia
ruben.vargas@correounivalle.edu.co

Resumen

En el presente texto planteamos la actividad de medir distancia sin uso de cinta métrica, con la finalidad de resaltar la dependencia que existe entre la geometría y la medida de distancia entre dos puntos. Partiendo del conocimiento que se tiene sobre la circunferencia en el plano, se ilustra el proceso llevado a cabo por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra. Realizamos así un análisis sobre las hipótesis empleadas en dicha medida, enfatizando el rol fundamental del V postulado de Euclides. Con el fin de presentar diversas geometrías y generalizar el concepto de distancia, visualizamos los conceptos de curvatura y geodésica y recalcamos la relación entre la teoría general de la relatividad de Einstein y las geometrías no Euclidianas.

Palabras clave: Educación Matemática; Geometría; Espacio; Medida; Distancia; Física.

Introducción

En nuestra propuesta tomamos como premisa que las ciencias modernas pueden y deben estar presentes en la escuela. En la actualidad, los teléfonos inteligentes, los televisores y los automóviles (entre otros objetos) tienen dentro de sus componentes electrónicos chips de alta tecnología que se han podido elaborar a nivel industrial gracias a los logros de diversas ramas de la ciencia, entre las que destaca la mecánica cuántica. Así mismo, la exactitud y la precisión de los actuales Sistemas de Posicionamiento Global (GPS, por su sigla en inglés) han demandado el uso de las predicciones de la teoría de la relatividad general. De los ejemplos anteriores se constata que las ciencias modernas están presentes en la tecnología que nos rodea. En este sentido consideramos pertinente preguntarnos ¿cómo podemos lograr una mayor presencia en la escuela de los principios básicos de la relatividad y la mecánica cuántica? Presentamos aquí un primer acercamiento para abordar esta pregunta.

La irrupción de la ciencia y la tecnología en la cotidianidad marca derroteros ineludibles en la sociedad. Uno de ellos está relacionado con la necesidad de divulgar a los ciudadanos criterios fundamentales de ciencia y tecnología. Para tal fin, dependiendo de la audiencia, hoy en día tenemos diversas maneras de comunicación, así como diversos niveles de profundidad. Algunos medios presentan la ciencia moderna como un conjunto de ideas, experimentos y logros de científicos famosos; de hecho, nombres como Einstein, Galileo y Newton son familiares para la mayoría de las personas. Otros se centran más en desarrollos tecnológicos como la TV, el teléfono celular, los computadores, las tabletas, etc. Sin embargo, es importante recordar que las plataformas fundamentales en las que subyacen los grandes descubrimientos científicos y tecnológicos son las ciencias naturales y la matemática, y dentro de ella la geometría. Es afortunado que la juventud actual se interese en la ciencia. De hecho, han surgido programas disponibles libremente en internet con propuestas muy interesantes de jóvenes científicos en las que divulgan el conocimiento profundizando en aspectos matemáticos básicos en general y geométricos en particular. Este enfoque tiene muchas ventajas, porque en lugar de aislarnos, nos acerca al maravilloso mundo de las matemáticas en la comprensión del mundo. Sin las matemáticas el avance científico sería insignificante (Dawkins, 2000 y Fischer, 2003).

Nuestra hipótesis es que la Geometría permite el acercamiento hacia el pensamiento matemático presente en las ciencias modernas. La búsqueda de la forma, la regularidad y su relación con el mundo que nos rodea es una constante en el desarrollo científico. Nuestra filosofía científica es heredera del pensamiento Platónico (Platón, 2020). Desde el planteamiento formulado en el *Timeo* (ver Figura 1) hasta nuestros días, continuamos en la búsqueda del conocimiento de la naturaleza y las propiedades medibles del Espacio (Zenil, 2015).

En la ciencia clásica el Espacio es estático y los objetos se mueven sobre él. Bajo esta mirada, es evidente el protagonismo de la geometría de Euclides. Por otro lado, las ciencias modernas nos enfrentan a un universo altamente dinámico, donde las geometrías no euclidianas se hacen necesarias para una descripción adecuada de la realidad física. Nuestra propuesta general consiste en usar diversas actividades que utilizan como punto de partida la geometría euclidiana y que nos lleven paulatinamente a considerar ideas que salen del contexto clásico para llevarnos a escenarios donde otras geometrías son posibles.

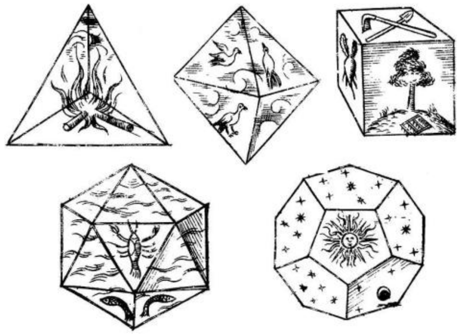

Figura 1. Imagen de dominio público, basada en los dibujos realizados por Kepler en su obra “El Misterio Cosmográfico” publicada en 1596. Este dibujo es una alusión a la obra *Timeo*, donde los primeros cuatro sólidos Platónicos (octaedro, tetraedro, hexaedro, icosaedro) se asocian a los elementos fundamentales: fuego, aire, tierra, agua, mientras que el quinto sólido (dodecaedro) se asocia a la quintaesencia, la cual Dios mismo utilizó para pintar el Universo.

En las líneas siguientes usaremos la actividad de medir Distancia para ilustrar nuestra propuesta.

Medir Distancia

Es altamente probable que, cuando pensamos en medir la distancia entre dos puntos o la longitud de un objeto, llegue a nuestra mente la idea de usar una regla o cinta métrica. Sin embargo, la propuesta que planteamos aquí es usar sólo una mínima información dada y algunas hipótesis para inferir la medida que se busca determinar.

Radio de la pizza sin uso de cinta métrica.

Observemos el ejemplo que se presenta en la Figura 2. Se plantea hallar el radio de la pizza que se ilustra a la izquierda, sabiendo que, al partirla en ocho porciones iguales, la longitud del borde de cada trozo es 10 cm. Con los conocimientos geométricos sobre las relaciones en la circunferencia se puede deducir el radio de la pizza.

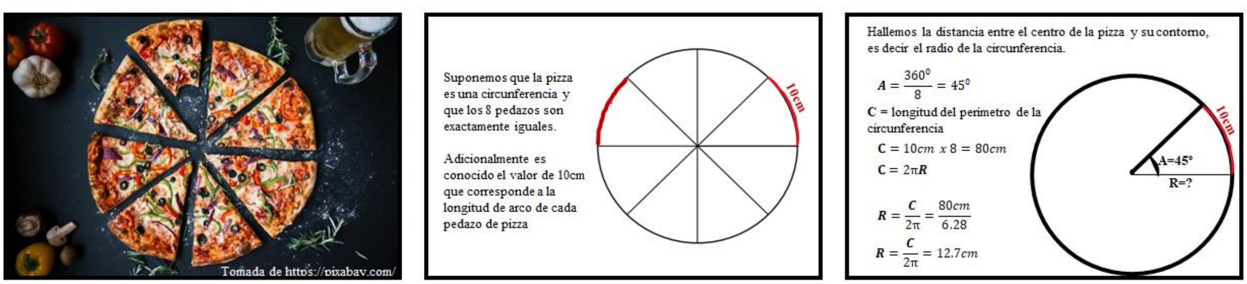

Figura 2. Radio de la pizza. Para hallar *R* estamos usando los supuestos como hipótesis, los valores dados y el conocimiento sobre las relaciones en la circunferencia.

Partiendo del desarrollo anterior, podemos establecer una analogía con el método llevado a cabo por Eratóstenes para hallar la longitud de la circunferencia y el radio terrestres.

Medida del radio de la Tierra.

Eratóstenes concluyó la esfericidad de la Tierra a partir de observaciones realizadas simultáneamente al medio día durante el solsticio de verano en dos ciudades diferentes de Egipto, Alejandría y Siena. Al comparar las observaciones se constató que en la ciudad de Alejandría un obelisco proyecta sombra, mientras que en la ciudad de Siena se observa ausencia de sombra. Eratóstenes interpretó esta discrepancia en el comportamiento de las sombras proyectadas por los obeliscos como una evidencia de la esfericidad de la Tierra. A partir de esa conclusión y conociendo la distancia entre las dos ciudades y el ángulo entre el obelisco y la sombra proyectada en Alejandría, pudo determinar la circunferencia terrestre y su radio, mediante un procedimiento análogo al que se indicó en el ejemplo de la pizza.

En la Figura 3 se esquematiza el desarrollo del razonamiento realizado para obtener el valor del radio de la Tierra.

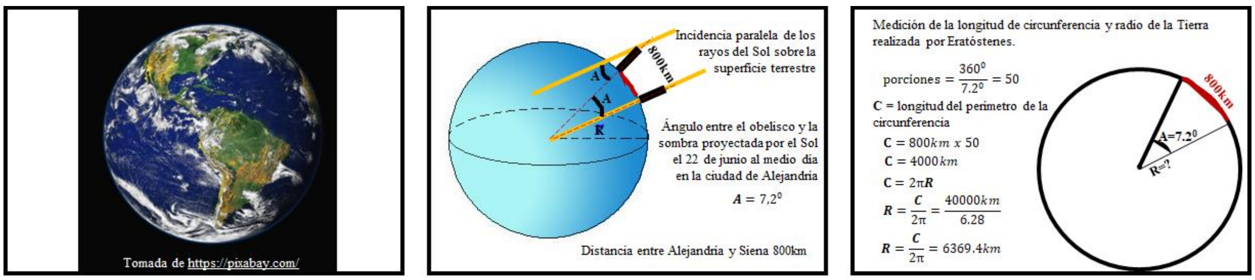

Figura 3. Radio de la Tierra. Eratóstenes usa como hipótesis para sus medidas la esfericidad de la Tierra y el paralelismo de los rayos del Sol incidiendo sobre la superficie terrestre, además se realizan las medias de ángulo de la sombra proyectada por el Obelisco en Alejandría y distancia entre las ciudades de Siena y Alejandría.

Es admirable que Eratóstenes, unos cientos de años antes de Cristo, lograra obtener estos valores. Las medidas modernas nos dan valores de 40 074 km y 6 378 km para la longitud de la circunferencia y el radio terrestres, respectivamente.

Medida del radio de la Tierra. La hipótesis

Examinemos con más detalle el proceso seguido por Eratóstenes.

Eratóstenes asumió que los rayos del Sol incidían de manera paralela sobre la superficie de la Tierra y recurrió a la idea de un Espacio Euclidiano para definir el paralelismo.

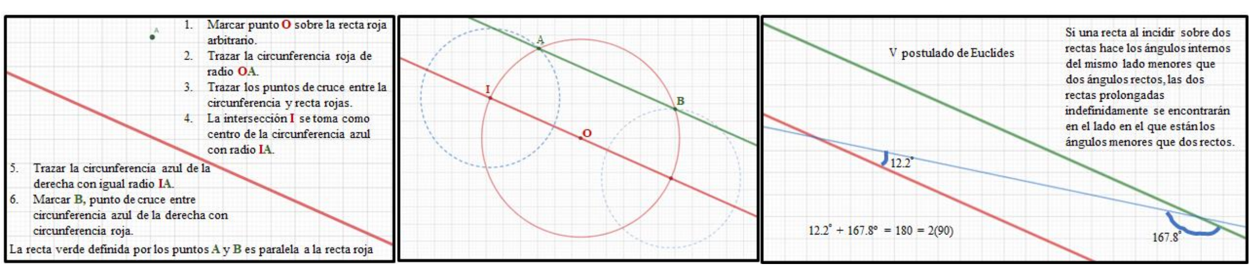

Figura 4. Rectas paralelas según geometría Euclidiana.

En el primer rectángulo de la Figura 4 se enuncian seis pasos para trazar una recta paralela a una recta dada. Dichos pasos se ilustran en el rectángulo del medio y finalmente se muestra cómo las dos rectas paralelas satisfacen el quinto postulado de Euclides. Dicho postulado tiene varias equivalencias entre ellas: “las rectas paralelas son equidistantes”, “la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es dos ángulos rectos o 180º”, “los ángulos alternos internos tienen igual medida” (Zenil, 2015). Justo esta última afirmación es usada en la Figura 3 al asignar igual medida a los ángulos indicados con la letra A.

Reflexionar sobre las hipótesis usadas en el proceso de medida nos puede llevar a explorar diversas posibilidades y plantearnos muchas preguntas, por ejemplo ¿qué pasaría si mi pizza estuviera sobre una superficie esférica? (Ver Figura 5).

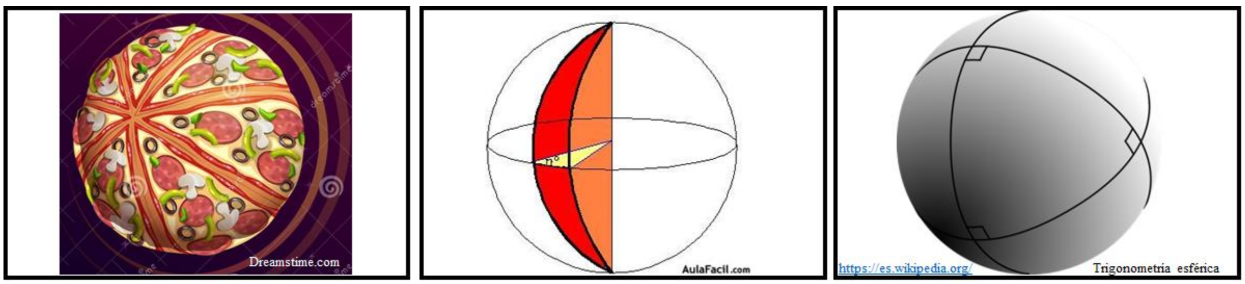

Figura 5. Pizza esférica. Sobre una superficie esférica el V postulado de Euclides no se cumple. Aquí “la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo **es mayor** a dos ángulos rectos o 180º”.

Alrededor del V postulado de Euclides hay una historia fascinante y tuvieron que pasar más de veinte siglos para que, con los trabajos independientes de Bolyai, Lobachevsky y Gauss, se constatara la independencia de este postulado respecto a los otros cuatro postulados en los que basó Euclides su geometría. Con este descubrimiento se abrió la posibilidad para explorar la existencia de otras geometrías, donde el V postulado no se cumple. (Zenil, 2015).

La geometría Euclidiana está en la base de una inmensa variedad de desarrollos científicos y tecnológicos y es el cimiento de la mecánica de Newton. Es de resaltar que Euclides vivió antes de Cristo y que sólo hasta el siglo XX de nuestra era las geometrías no Euclidianas empezaron a ganar protagonismo en el mundo físico para ser usadas en las ciencias y tecnologías actuales.

Curvatura

Si comparamos las pizzas en las Figuras 2 y 5 observamos que en la Figura 2 las líneas son rectas y en la Figura 5 las líneas son curvas. La curvatura es esencial en el momento de caracterizar el tipo de geometría. En la Figura 6 podemos observar la idea general de la curvatura de una línea.

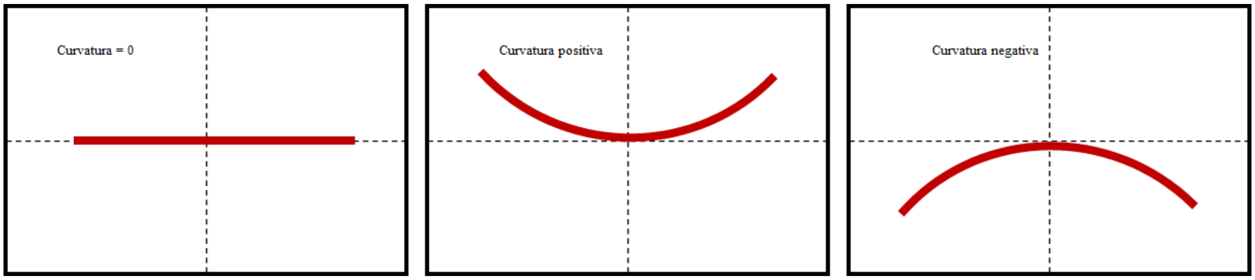

Figura 6. Curvatura de la línea.

También es posible medir la curvatura de una superficie. En general, las superficies son más complejas y pueden presentar localmente diferentes valores de curvatura, como el caso de la silla de montar que se muestra en la Figura 7. La curvatura total se obtiene al multiplicar los dos valores obtenidos. (Madrid, 2018).

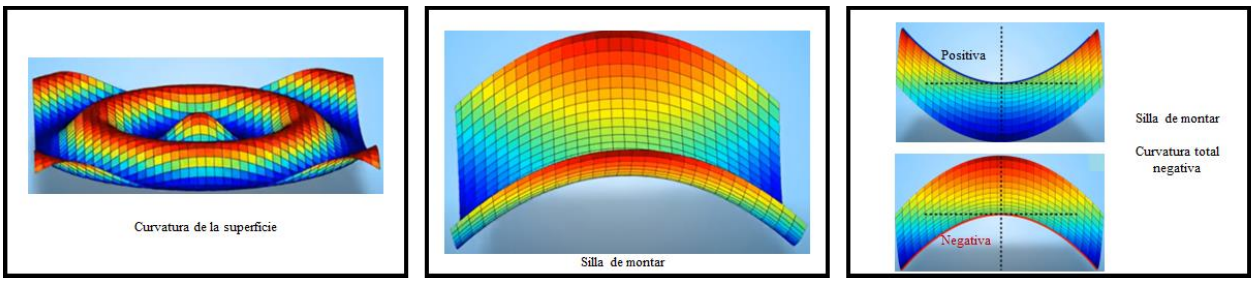

Figura 7. Curvatura de la superficie. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Una superficie cilíndrica también presenta dos curvaturas: una perspectiva desde la base nos permite observar un semiarco con curvatura negativa, pero al rotar la superficie y verla lateralmente, vemos una línea recta, la cual presenta curvatura cero. Por lo tanto, la curvatura total de la superficie cilíndrica es cero. De esta forma, el plano y la superficie cilíndrica tienen igual curvatura, curvatura cero, ver Figura 8.

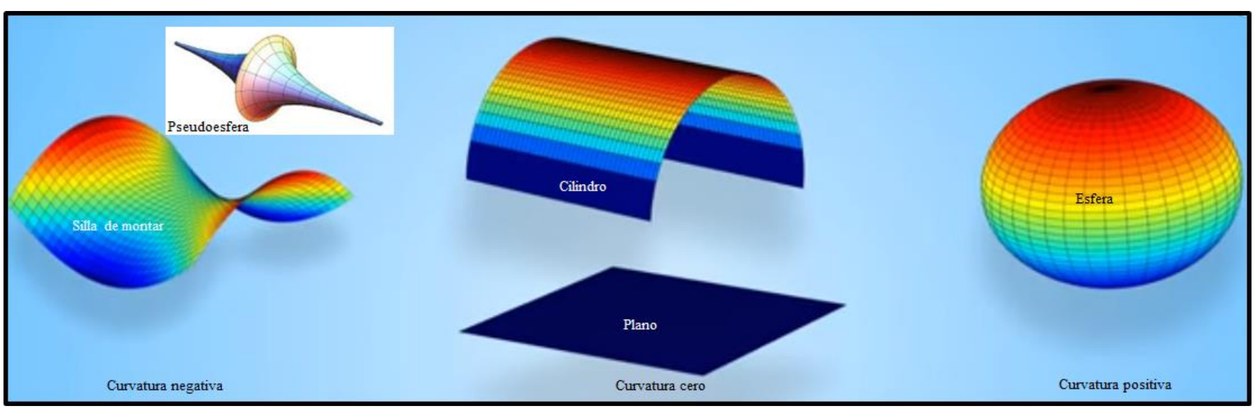

Figura 8. Curvatura negativa, positiva y nula. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Un resultado interesante del teorema Egregium de Gauss es que entre dos superficies con igual curvatura existe una isometría (es decir, al aplicar una transformación entre las dos superficies, la distancia entre puntos se conserva). En otras palabras, la isometría también puede verse como la invarianza en la curvatura al deformar la superficie sin estirarla. Por esto en cartografía, cuando se representa la Tierra en un plano, los mapas siempre lucen deformados, como se puede ver en la Figura 9. De hecho, la deformación en un mapa hace que una isla como Groenlandia parezca comparable en tamaño a Europa, cuando en realidad no es así. (Madrid, 2018).

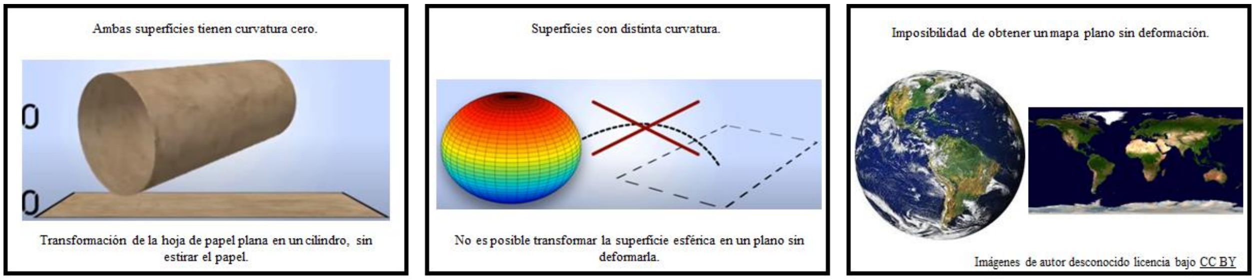

Figura 9. Curvatura de superficies y transformaciones. Tomado de @lemnismath: https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Distancia

Podemos ver que, desde situaciones cotidianas, como la partición de una pizza, es posible adentrarnos en la generalización del concepto de distancia. Concluimos pues con una observación fundamental: la medida de la distancia entre dos puntos depende de la geometría del espacio en el cual ellos se sitúan.

Distancia. La Geodésica

Dependiendo de la curvatura de la superficie, el camino más corto entre dos puntos (denominado geodésica) puede tomar diversas formas, tal como se evidencia en la Figura 10.

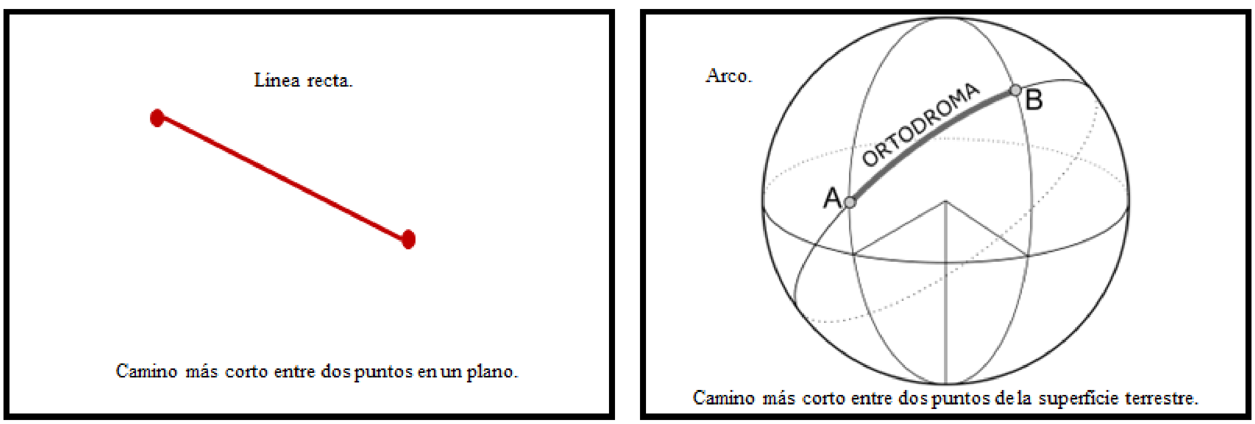

Figura 10. Geodésica. Figura de ortodroma, tomado de Wikipedia.

En lo anterior podemos observar cómo el hecho de explorar situaciones acerca de la medida de distancia sobre superficies no planas puede conducirnos a geometrías no euclidianas, las cuales no satisfacen el V postulado de Euclides. Además, hemos observado cómo en superficies con curvaturas diferentes de cero se hace necesario generalizar el concepto de distancia, como se observa en la Figura 10. La ortodrómica es precisamente la geodésica de la superficie terrestre. Por tanto, debemos enfatizar que la frase: “la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta” es válida sólo en el contexto de un plano, es decir, en la llamada geometría plana o de Euclides.

En la Figura 11 se observan de manera esquemática algunos puntos generales de cuatro geometrías. El primer cuadro corresponde a la geometría de Euclides, donde su V postulado es válido. Los otros tres cuadros representan geometrías donde el V postulado de Euclides no se cumple y por ello se consideran geometrías no euclidianas.

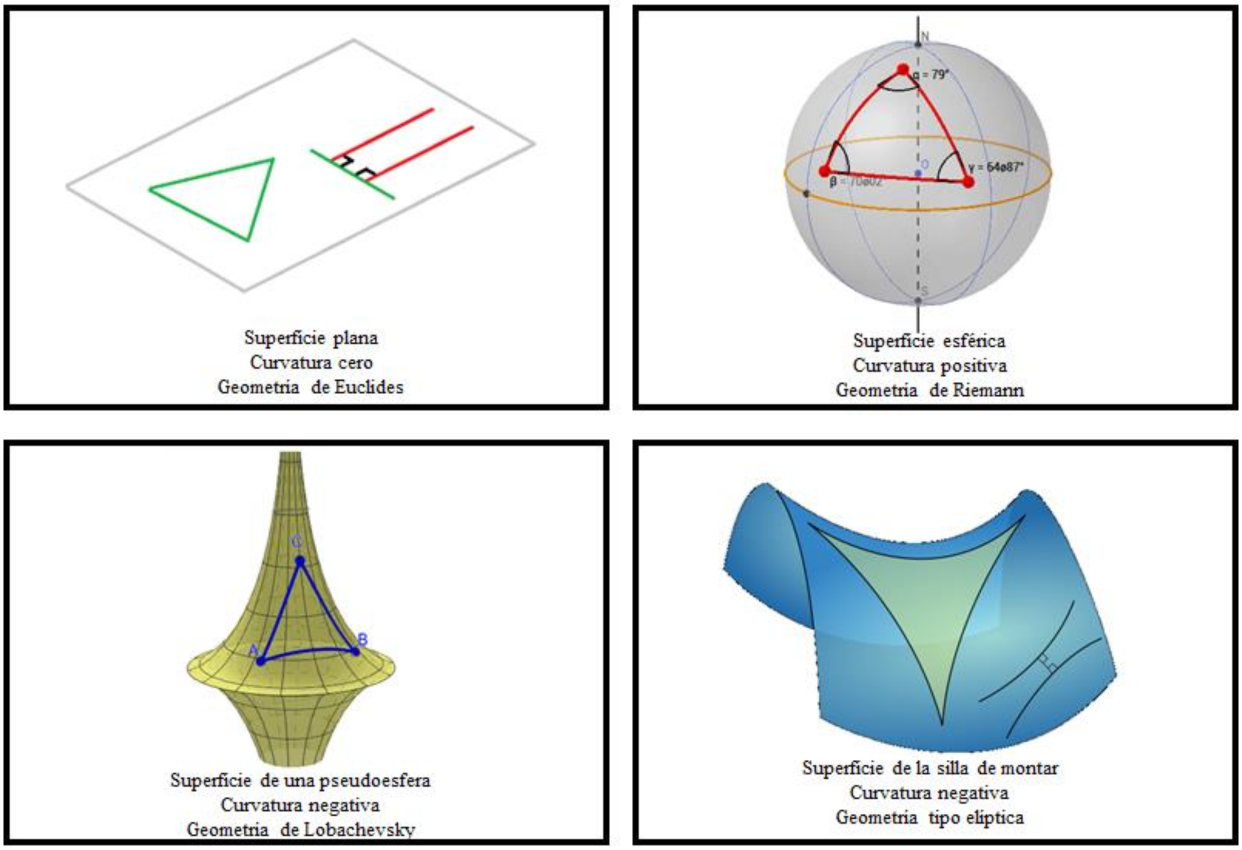

Figura 11. Tipos de geometrías.

El surgimiento de geometrías no euclidianas en el siglo XIX abrió el camino a gran variedad de nuevas áreas en la matemática. En el siglo XX, estas ideas matemáticas y geométricas permitieron a Einstein enunciar la teoría de la relatividad general, uno de cuyos resultados es la trayectoria curvilínea de la luz (deflexión) en presencia de un campo gravitacional (Figura 12), con lo que se evidencia la necesidad de introducir geometrías no euclidianas para la descripción adecuada de los fenómenos físicos relacionados con la interacción gravitacional.

En la Figura 3 vimos que Eratóstenes usó como hipótesis el paralelismo de los rayos solares incidiendo sobre la superficie terrestre. Dicho paralelismo está enunciado en el marco de la geometría Euclidiana. Sin embargo, en la actualidad el uso de geometrías no euclidianas es necesario cuando se pretende estudiar el Universo a gran escala, como lo han evidenciado las predicciones de la teoría de la relatividad general y la gran variedad de observaciones que corroboran la deflexión de la luz cerca de objetos masivos, por ejemplo, el Sol.

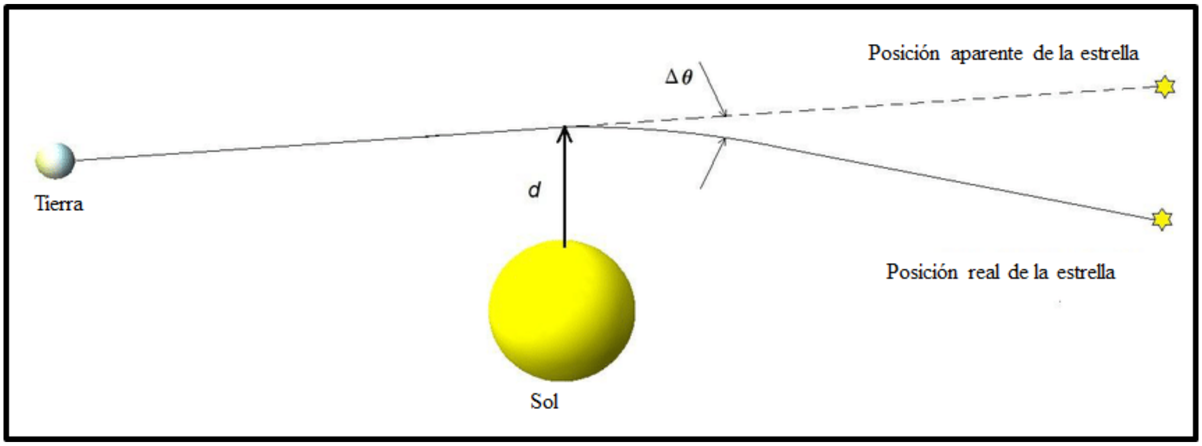

Figura 12. Deflexión de la luz al pasar cerca al Sol.

En el texto anterior presentamos las ideas a desarrollar en este minicurso, el cual se centra en el uso de objetos geométricos para resaltar la fuerte dependencia entre la medida de distancia y la geometría del espacio.

Referencias y bibliografía

Dawkins, R. (2000). *Destejiendo el arcoíris*. Tusquets editores.

Fischer, E. (2003). La otra cultura: lo que debería saber de las ciencias naturales. Galaxia Gutenberg.

Madrid, J. (2018). La manera más matemática de comerse una pizza. @lemnismath. https://youtu.be/1mVTp-8Zmok

Platón. (2020). Timeo. Traducción de Carola Tognetti. Greenbooks editore. Edición digital.

Zenil, H. (2015). Lo que cabe en el espacio: la geometría como pretexto para explorar nuestra realidad física y matemática. *Copit ArXives* UNAM. Edición digital.

.