

# XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023



[xvi.ciaem-iacme.org](http://xvi.ciaem-iacme.org)

## Camino hacia una propuesta de innovación para la enseñanza de Geometría 3D con realidad virtual

Brahiam **Ramírez** Jofré

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile

[brahiam.ramirez@pucv.cl](mailto:brahiam.ramirez@pucv.cl)

Marceo **González** Díaz

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile

[marcelo.gonzalez.d@mail.pucv.cl](mailto:marcelo.gonzalez.d@mail.pucv.cl)

Ricardo **Zambrano** Reyes

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile

[ricardo.zambrano@pucv.cl](mailto:ricardo.zambrano@pucv.cl)

### Resumen

Se presentan avances en identificar una problemática en geometría 3D en alumnos de tercer y cuarto año de enseñanza media (16-18 años) con el objetivo de plantear una propuesta de innovación con realidad virtual para subsanar los errores que se encuentren en la investigación exploratoria. Se han obtenido respuestas de 30 estudiantes de dos establecimientos chilenos a los que se les aplicó un cuestionario para responder a la pregunta de investigación ¿qué errores cometen los estudiantes en tercer y cuarto año de enseñanza media al representar las vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales? Obteniendo como resultado 11 tipos de respuestas diferentes en 5 vistas ortogonales (apartado principal del cuestionario), presentando mayor error en vistas traseras (63,2%) y vistas superiores (66,4%) con el 56,4% de las respuestas diferentes a la correcta en el apartado principal del cuestionario.

*Palabras clave:* Educación Matemática; Educación secundaria; Recursos Libres de Matemáticas; Planeamiento educativo; TICs; Investigación cualitativa; Geometría; Chile.

## Investigación

### Identificando la problemática

En los establecimientos educacionales chilenos, durante el tercer y cuarto año de enseñanza media los estudiantes (16-18 años) deben realizar proyecciones ortogonales de figuras geométricas tridimensionales (MINEDUC, 2012a).

Debido a que el método de enseñanza es mostrar una figura 3D en un medio bidimensional (impreso), esto conlleva que empleen el uso de habilidades de razonamiento espacial que han sido investigadas en algunas instancias en diferentes partes del mundo; sin embargo, no hay evidencia de algún estudio presente en Chile.

En estudiantes japoneses, Fujita et al. (2017), investigó el razonamiento espacial de alumnos de 7, 8 y 9 grado (12-15 años) al resolver problemas en los cuales se les solicitaba trabajar en 2D, cuerpos geométricos 3D, con operaciones determinadas. Este estudio fue ejecutado a 455 estudiantes, evidenciando más del 75% de error en sus respuestas. Los autores concluyen que la visualización espacial y el razonamiento analítico son importantes de ser atendidos, ya que, sin el conocimiento específico, el razonamiento puede ser influenciado por la apariencia visual de la geometría. También indican lo complejo de pensar con representaciones 3D, para lo cual se propone trabajar en grupos atendiendo a procesos de razonamiento geométrico. Este estudio reveló que el fallo de los estudiantes se debió a que no manipulan mentalmente las representaciones de forma efectiva, mientras que, quienes lograron esta manipulación llegaron a soluciones correctas.

Fujita et al. (2020) identifica habilidades de razonamiento espacial de los estudiantes y cómo estos emplean sus habilidades y conocimientos para desarrollar problemas geométricos. Esta investigación está basada en 4 tipos de razonamientos: representación de objetos 3D; estructuración espacial; conceptualización de propiedades matemáticas; y medición. Justificando mediante Duval (1999), el razonamiento geométrico es caracterizado por la interacción que existe entre el aspecto visual y el conceptual, indicando que se enfocan en las habilidades relacionadas con la manipulación de representaciones de formas 3D y el razonamiento de las propiedades geométricas.

Saralar et al. (2018) han investigado el razonamiento en representaciones 3D de estudiantes de Turquía, por lo que se considerará un proyecto de estos autores (Middle School Students [estudiantes de secundaria]), cuya meta recae en el diseño de lecciones apoyen al mejoramiento de la comprensión que tienen los estudiantes de las formas 3D. Es con este enfoque que se considera un estudio sobre los errores de los estudiantes en representaciones bidimensionales (Saralar et al., 2018); cuyo objetivo de la investigación es estudiar los errores que cometen los estudiantes en las proyecciones ortogonales de una figura 3D (identificar y dibujar vistas) y de la construcción de figuras 3D a partir de situaciones 2D (dibujo isométrico).

## **Currículo escolar chileno**

La construcción del conocimiento sobre la visualización espacial, comienza a temprana edad en los alumnos chilenos, en primer año de enseñanza básica (6 años), cuyo nivel solicita al estudiante identificar figuras 3D en su entorno y relacionarlas con objetos concretos (MINEDUC, 2021); en el nivel siguiente, se construyen figuras 3D (MINEDUC, 2012b) y en tercer nivel de enseñanza básica los alumnos construyen figuras 3D a partir de figuras 2D (MINEDUC, 2012b); es en cuarto año de enseñanza básica (9 años) en el cual se trabaja con el contenido de vistas de un cuerpo 3D (MINEDUC, 2020).

Los siguientes niveles educativos trabajan en torno a volumen de cuerpos geométricos, hasta que en el curso electivo de Geometría 3D, que se dicta en cursos de tercer y cuarto año de enseñanza media (16-18 años), se retoman las vistas de un cuerpo geométrico. Es en este nivel (7 años después de trabajarlos por primera vez) que los alumnos deberán emplear sus conocimientos de vistas ortogonales para realizar proyecciones; sin embargo, la trayectoria académica no asegura que sea un contenido con conocimientos previos fortalecidos ni de dominio común con un correcto desarrollo del razonamiento geométrico y espacial.

Todos estudios revisados comparten que no es sencillo poder llevar figuras 3D a 2D, ya sea por la información que se pierde en una proyección ortogonal (Casas et al., 2015), el desarrollo de un correcto razonamiento al interpretar una figura 3D que es representada en un medio 2D o porque el alumno necesita de ciertas habilidades para llevar a cabo actividades en las cuales debe manipular mentalmente una representación del objeto. Es por lo anterior mencionado que se justifica la problemática de una correcta visualización espacial y la dificultad de representar vistas ortogonales de las figuras geométricas presentadas en los textos escolares, bajo la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué errores cometen los estudiantes en tercer y cuarto año de enseñanza media al representar las vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales?

## **Marco Teórico**

La Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas (TRRS), Duval (1999), es empleada en esta investigación para definir el razonamiento espacial de los estudiantes en la manipulación mental que hagan de las representaciones que se les entregue. Estas representaciones son las diferentes maneras de presentar un objeto mientras que la semiótica es el estudio sobre los sistemas de significados que se le da a un elemento, lo que permite al estudiante interactuar con la información.

La aprehensión de un concepto, según Duval (1999), no puede existir sin una representación del mismo, para esto plantea la representación mental (imágenes que se tiene sobre un objeto) y la representación semiótica (signos por los que las personas manifiestan las representaciones mentales y las comparten mediante registros. Duval (1999) presenta la semiosis como la aprehensión o producción de una representación semiótica y la noesis como la aprehensión conceptual del objeto representado, también indica que sin la semiosis no existe la noesis. Además, existe la clasificación interna, cuando un individuo imagina una representación y la externaliza, y externa cuando proviene fuera del individuo e interactúa con él. Esta última es

la que la TRRS permite adecuar la investigación bajo sus principios teóricos y los errores que se pueden ocasionar en la interacción representación-individuo.

Contextualizando la TRRS a la investigación, es necesario exponer los actos cognitivos: noesis y semiosis. Este último, se liga a la formación, primer acercamiento con la representación; el tratamiento, representación ya aplicada la actividad; y la conversión, transición de un registro a otro distinto del objeto matemático.

Según Callone y Torres (2013), “cada alumno efectúa una comprensión diferente de cualquier otra comprensión, porque todo intento de dar significado se apoya no solo en los materiales de aprendizaje (representaciones externas), sino en los conocimientos previos activados para tal fin” (p.289), por lo cual, se ha empleado la TRRS para identificar las posibles vistas que infiere el alumno recolectando información mental de un registro. En este proceso se pueden presentar errores debido a:

- Dificultades para obtener información espacial.
- Un dominio deficiente de las habilidades, los hechos y conocimientos previos.
- La comprensión del enunciado.
- La dificultad de dibujar representaciones desde un plano bidimensional o un tridimensional o viceversa.

Para Amaya y Medina (2013), estos errores toman mayor importancia al momento de retroalimentar al estudiante durante su proceso de aprendizaje, además “aparecen ser connaturales de cualquier proceso matemático, en particular de los procesos asociados a las transformaciones de representaciones” (p.125). Al estudiar sobre errores en proyecciones ortogonales, el tratamiento de una representación será clave para completar las tareas. Es de gran importancia el comprender el concepto matemático antes de ejecutar una actividad.

### **Metodología**

La información se obtuvo a través de un cuestionario de 4 partes; la primera y segunda parte son dos preguntas (P1 y P2) adaptadas de pruebas del Sistema de Medición de Calidad de la Educación (SIMCE) del año 2018, prueba estandarizada y poblacional en Chile (estudiantes de cuarto año de enseñanza básica) cuyo análisis de errores se presenta por la Agencia de la Calidad de la Educación (2019), estas preguntas se adaptaron para facilitar la obtención de los argumentos de los estudiantes frente a las preguntas propuestas. La tercera (P3) y cuarta (P4) parte son propuestas del estudio de Saralar et al. (2018), cuya extracción es de preguntas de pruebas estandarizadas del Ministerio de Educación Nacional de Turquía (2016): en la P3 los estudiantes deben registrar las distintas vistas de los 5 cuerpos geométricos propuestos (figuras policúbicas) y en la P4 deben dibujar la representación del cuerpo geométrico 3D con base en 4 vistas ortogonales entregadas en el cuestionario.

La investigación es un estudio de caso cuyos sujetos de estudio son 30 estudiantes de 2 establecimientos educacionales de la ciudad de Viña del Mar, Chile (datos tomados entre octubre y noviembre de 2022 en una sesión de 90 minutos), de tercer y cuarto año de enseñanza media

(16-18 años), cuya supervisión y recolección del cuestionario impreso fue empleado por uno de los investigadores en compañía del docente a cargo de cada curso.

La clasificación de respuestas se realizó por medio de un consenso entre los 3 autores, enumerando del 1 al 30 a cada alumno y separando cada una de las respuestas, por lo que cada alumno tendría 12 preguntas y respuestas (1 en P1, 1 en P2, 5 en P3 y 5 en P4), así se podría analizar las figuras (o preguntas) las cuales serían 12, las vistas que serían 4 por figura en la P3 (obteniendo 20 respuestas por alumno) y los dibujos de cuerpos geométricos obteniendo 5 por alumno, justificando desde las TRRS ante el posible razonamiento del estudiante.

## Resultados

Se observa que, dependiendo el tipo de pregunta, los alumnos tienen tendencia a responder correctamente el global de la encuesta, considerando que ambos cursos tenían como conocimientos previos las vistas ortogonales, contenido trabajado con anterioridad por los docentes de matemáticas.

En el cuestionario seccionado en 4 partes (P1, P2, P3 y P4), se identificaron 11 tipos de respuestas en la P3 y 7 en la P4, y arroja que en la P1 (figura policúbica) se empleó un razonamiento espacial en la mayoría de los estudiantes (76.7%), con argumentos que permiten inferir la manipulación mental de la representación de la figura, descomponiéndola en partes para ver sus cubos; el 10% de respuestas se concentran en estudiantes que indican que no pueden saber qué hay detrás de la figura, por ende, solo contabilizan los cubos visibles, aquello no se considera como una dificultad en algún dominio de habilidad espacial, ya que efectivamente la figura al estar en un medio 2D (hoja impresa) no permite tener certeza sobre la totalidad de los cubos que la componen, por lo que la inferencia (lenguaje con incertidumbre) en el razonamiento espacial era el indicado para abarcarla, sin embargo no se presentó. Mientras que, en la P2 (identificar todas vistas de una pirámide), solo 3 estudiantes responden mal al no identificar la vista superior y 1 plantea una vista a partir de una proyección plana paralela perpendicular de la figura presentada.

La P3 (dibujar 4 vistas a partir de una figura policúbica) es el tipo de pregunta principal de la investigación, el error más frecuente procede de representar la vista trasera de las figuras 3D presente en 2 de las 5 situaciones propuestas y que concentra el 63.2% de error, mientras que la representación de vistas superiores tiene un 66.4% de respuestas incorrectas. Estas situaciones están asociadas a la manipulación mental de la representación de la figura 3D, dificultando al alumno poder inferir sobre la formación de la vista trasera ya que es la que menos información exhibe en la figura y la vista superior debido a la noción de profundidad que se bosqueja.

En casos generales, un 17.8% de las respuestas presentan errores en dibujar una vista 2D con profundidad (ennegreciendo las capas posteriores) y el 16.8% de las respuestas tienen una modificación en las dimensiones de las vistas (algunos alumnos realizan una proyección plana paralela oblicua de ampliación).

En el caso de la P4, representar figuras 3D a partir de 4 vistas ortogonales, se presentó un 48.2% de error en dicha actividad.

Se ejemplifica una respuesta de estudiante que reúne 2 tipos de errores en la P3 (situación P3.2), el primero de ellos se genera en la vista frontal, esta vista es el dibujo 3D de la misma figura (categorizado como respuesta 3.3), mientras que en la vista superior altera la dimensión de la figura (respuesta 3.2); la vista izquierda tiene la respuesta de tipo 3.3 de representación 3D de una vista 2D.

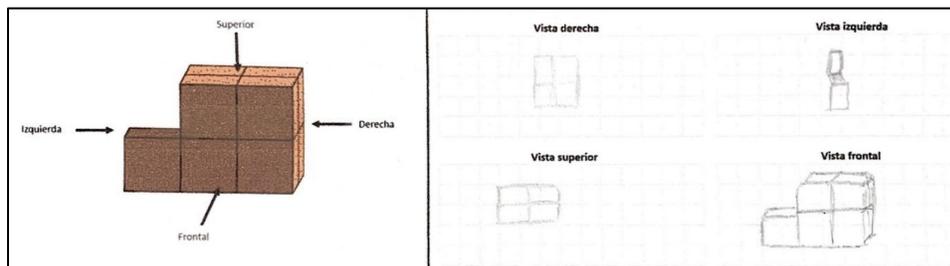


Figura 1. Respuesta de alumno 2 a la P3.2.

## Conclusiones

Se encontró en esta investigación que hay estudiantes que no comprenden la noción de vistas ortogonales, ya que hacen representaciones tridimensionales de las vistas; luego, dentro de todas las preguntas, la P3 presenta mayor concentración de los errores, específicamente es en las partes P3.4 y P3.5 que reúnen el 52% de las respuestas erróneas; es coincidente con la complejidad de la figura con respecto a las planteadas en la P3.1, P3.2 y P3.3 y la incorporación de la vista trasera en la P3.3 y P3.4.

Se han encontrado 10 tipos de respuestas diferentes a la experta (rigurosa) en la P3, concluyendo así que se ha evidenciado una gran variedad en cómo los estudiantes interpretan y manipulan mentalmente las figuras 3D dando diversas respuestas a la matemáticamente experta, por lo que se atribuye a la falta de razonamiento geométrico y potencia de habilidades espaciales que puede adquirir el estudiante en su formación, evidenciando una gran variedad de errores que se cometen en las vistas ortogonales de cuerpos geométricos 3D. Estos errores quedaron expuestos en mayoría en la vista superior y trasera, esta última es la vista menos accesible para el estudiante y la cual demanda una mayor manipulación mental de la representación.

## Proyecciones

Esta investigación atiende a un proceso planificado para plantear una propuesta de innovación con justificaciones en la problemática que se quiso atender, por lo que luego de proceder con el análisis de las respuestas de los estudiantes bajo una investigación cualitativa justificada desde la TRRS y habilidades de razonamiento geométrico espacial, se espera subsanar las dificultades que generan la diversidad de respuestas diferenciadas de la que se considera correcta para la investigación, por medio de una propuesta de innovación con proyecciones de ser implementada en establecimientos educacionales de Chile. Esta propuesta es siguiendo una serie de propuestas similares para potenciar la geometría y la visualización espacial (Escrivà et al., 2018; del Cerro y Morales, 2017; Sua et al., 2021) por medio de la realidad virtual (VR), proponiendo hacer uso de software de diseño (SketchUp u otro por analizar su factibilidad), en el cual el alumno estará inmerso en una manipulación virtual de la figura por medio de lentes VR.

## Bibliografía y referencias

- Agencia de la Calidad de la Educación. (2019). *Aprendiendo de los Errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas*. Agencia de Calidad de la Educación.
- Amaya y Medina (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación Matemática*, 25(2), 119-140. <http://dx.doi.org/10.24844/EM>
- Callone C., y Torres, N. (2013). ¿Por qué las representaciones semióticas pueden ser obstáculos para la comprensión? Un estudio en el tema ácido-base. *Educación Química*, 24(3), 288-297. [http://dx.doi.org/10.1016/S0187-893X\(13\)72478-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0187-893X(13)72478-9)
- Casas, S., Pareja, I. y Pérez, M. (2015). *Expresión gráfica*. Universidad de Valencia.
- Del Cerro, F., y Morales, G. (2017). Realidad aumentada como herramienta de mejora de la inteligencia espacial em estudiantes de educación secundaria. *Revista de Educación a Distancia*, 17(54). <https://revistas.um.es/red/article/view/298831>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos de Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.
- Escrivà, M., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización em educación primaria. *Edma*, 7(1), 45-62. <https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/50>
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012a). *Matemática: Programa de Estudio: Cuarto Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012b). *Bases Curriculares: Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2020). *Texto del estudiante: Matemática 4° básico*. Santillana.
- Ministerio de Educación de Chile. (2021). *Sumo Primero: 1° básico: Texto del Estudiante: Tomo 1*. Unidad de Currículum y Evaluación. [https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc\\_01](https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc_01)
- Ministerio de Educación Nacional de Turquía. (2016). *Banco de exámenes de secundaria*. Obtenido de [http://www.meb.gov.tr/meb\\_sinavindex.php](http://www.meb.gov.tr/meb_sinavindex.php)
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H. y Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The journal of mathematical behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura H., Kunimune, S. y Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 235-255. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>
- Saralar, I., Ainsworth, S., y Wake, G. (2018). Middle school students' errors in two-dimensional representations of threedimensional shapes. *Research in Mathematics Education*, 20(2), 1-3. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1482475>
- Sua, C., Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. En Diago, P. D., Yáñez, D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM.